LÍMITES INDETERMINADOS

Límites determinados es cuando después de evaluar el límite de una función en un punto “a”, se obtiene una forma indeterminada.

Para poder evaluar el comportamiento de la función en el punto “a”, se debe hacer uso de reglas algebraicas tales como: la factorización, la racionalización, entre otras; lo que se logra con estas reglas es transformar la función original en una nueva, y con esta nueva poder valorarla en este punto.

Algunos tipos de indeterminación:

1) Infinito dividido entre infinito $\frac{\infty}{\infty} \rightarrow Ind$
2) Infinito menos infinito $\infty - \infty \rightarrow Ind$
3) Cero dividido entre cero $\frac{0}{0} \rightarrow Ind$
4) Cero multiplicado por infinito $0 * \infty \rightarrow Ind$
5) Cero elevado a cero $0^0 \rightarrow Ind$
6) Infinito elevado a cero $\infty^0 \rightarrow Ind$
7) Uno elevado a infinito $1^\infty \rightarrow Ind$

Estas expresiones, denominadas indeterminaciones, son llamadas así dado que, a simple vista, no está claro cuál puede ser el límite (si es que existe). En algunos casos, simplificando las expresiones u obteniendo expresiones equivalentes a las iniciales, se puede resolver la indeterminación y calcular el límite.

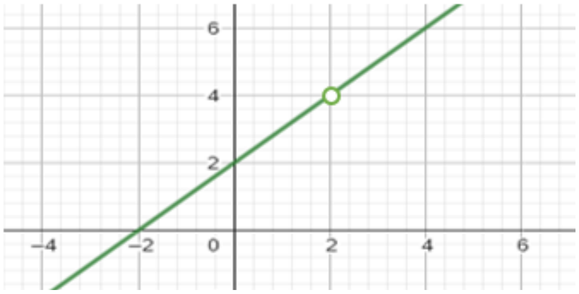
Ejemplos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Al sustituir el valor de x=3 en el cociente tenemos lo siguiente:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(2)^2 - 4}{2 - 2} = \frac{4 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

Cero dividido entre cero $\frac{0}{0} \to Ind$



La gráfica de $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ es:

Y observamos que el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima al valor de 2 es 4, que se puede obtener de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} =$$

$$\lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

Observaciones:

a) Si una función $f(x)$ se puede simplificar, el límite $f(x)$ cuando x se aproxima a "a" es idéntico a la función simplificada cuando x se aproxima a "a".
b) Siempre que se obtenga una indeterminación (%) al hacer una sustitución y antes que el límite no existe, se deberá simplificar la función dada para eliminar la indeterminación para luego aplicar el límite

Ejemplo

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=$$

Al sustituir el valor de $x=3$, obtenemos $\frac{3-3}{3^2-9}=\frac{0}{0}$ que es una indeterminación por lo que:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{3}+x\right)^2-1/9}{x}=$$

En este ejemplo también se obtiene una indeterminación cuando se sustituye x por cero

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{3}+x\right)^2-1/9}{x}=\frac{\left(\frac{1}{3}+0\right)^2-1/9}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{3}+x\right)^2-\frac{1}{9}}{x}=$$

Desarrollamos el binomio al cuadrado

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{3}+x\right)^2-\frac{1}{9}}{x}=\frac{\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x+x^2-\frac{1}{9}}{x}$$

Simplificamos el numerador

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x+x^2}{x}$$

Factorizamos el numerador

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{2}{3}+x\right)}{x}$$

Simplificamos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}+x\right)=\left(\frac{2}{3}+0\right)=\frac{2}{3}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x}$$

En este ejemplo también se obtiene una indeterminación cuando se sustituye x por cero

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x}=\frac{0^2-2(0)}{0}=\frac{0}{0}$$

Por lo tanto procedemos a factorizar

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x}=\frac{x(x-2)}{x}$$

Al simplificar queda:

$$\lim_{x\to 0}(x-2)$$

Valoramos el límite

$$\lim_{x\to 0}(x-2)=0-2=-2$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{1-\sqrt{2x+5}}$$

En este ejemplo, al sustituir x por -2 también nos da una indeterminación, y para eliminarlo se racionaliza el denominador, es decir, se elimina del denominador los racionales.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{1-\sqrt{2x+5}}$$

Para racionalizar multiplicamos por el conjugado del denominador, que en este caso es $1+\sqrt{2x+5}$, este lo multiplicamos tanto en el numerador como en el denominador para no afectar la función

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)\left(1+\sqrt{2x+5}\right)}{\left(1-\sqrt{2x+5}\right)\left(1+\sqrt{2x+5}\right)}$$

Al multiplicar se cancela la raíz del denominador

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)\left(1+\sqrt{2x+5}\right)}{1-(2x+5)}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)\left(1+\sqrt{2x+5}\right)}{1-2x-5}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)\left(1+\sqrt{2x+5}\right)}{-2x-4}$$

Factorizamos el denominador

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)\left(1+\sqrt{2x+5}\right)}{-2(x+2)}$$

Simplificamos

$$\lim_{x\to -2}\frac{\left(1+\sqrt{2x+5}\right)}{-2}$$

Sustituimos el valor de x

$$\lim_{x\to -2}\frac{\left(1+\sqrt{2x+5}\right)}{-2}=\frac{1+\sqrt{2(-2)+5}}{-2}$$

$$=\frac{1+\sqrt{1}}{-2}$$

$$=\frac{2}{-2}$$

$$=-1$$

En el siguiente ejemplo será necesario racionalizar el numerador:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=$$

Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del numerador, en este caso $\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)$, esto con el fin de no alterar la función.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)-(x)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Referencia:

Silva Ochoa, J. M., & Lazo, A. (1990). Fundamentos de matemáticas: álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo. Limusa.

Por más matematica (s.f.). A qué llamaremos indeterminado. Recuperado de: http://pormasmatematica.com.ar/por-mas-matematica/funcion/limites-indeterminados/