LÍMITES POR INCREMENTOS

Uno de los objetivos fundamentales del cálculo infinitesimal es estudiar cómo varía una función cuando el valor de su variable independiente cambia.
El límite por incremento es la derivada de una función, que se define como límite de la razón.
Si x es la variable independiente de la función $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, su valor cambia desde x_1 hasta x_2 ; el aumento o disminución que experimenta dicha variable se llama incremento de x y se denomina Δx . Así tenemos:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Cuando la variable independiente $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ experimenta un incremento Δy, generalmente la función y también experimenta un aumento o disminución de su valor, el cual se denomina **incremento de la función** y se denota por Δy, es decir:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

Como $\Delta x = x_2 - x_1$, por lo tanto $x_2 = x_1 + \Delta x$. Así tenemos que:

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

La palabra incremento se emplea para referirnos a la variación: aumento (+) o disminución (-).

Ejemplo 1

$$y = 3x^2 - 5$$

a) Calcular el incremento Δy correspondiente a un incremento Δx de x

b) Calcular Δy cuando x cambia de 2 a 2.1

Aplicando la definición:

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$
$$= [3(x + \Delta x)^2 - 5] - [3x^2 - 5]$$

Desarrollamos el binomio al cuadrado

$$= [3(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2) - 5] - [3x^2 - 5]$$

Multiplicamos por el 3

$$= [3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - 5] - [3x^2 - 5]$$

Ahora eliminamos paréntesis, multiplicando en $F(x1)$ por el negativo de la definición

$$= 3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - 5 - 3x^2 + 5$$

Juntamos términos semejantes:

$$= 3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - 5 - 3x^2 + 5$$

Queda:

$$= 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2$$

Como deseamos calcular Δy cuando x cambia de 2 a 2.1, por lo tanto $x = 2, \Delta x = 0.1$; al sustituir los valores en la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\Delta y = 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2$$

$$= 6(2)(0.1) + 3(0.1)^2 = 1.2 + 0.03 = 1.23$$

Por lo tanto, el cambio de y es ***1.23*** cuando x varia de 2 a 2.1

También se puede calcular el incremento Δy directamente como sigue :

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) = f(2.1) - f(2)$$

$$= [3(2.1)^2 - 5] - [3(2)^2 - 5] = 8.23 - 7 = 1.23$$

La notación de incrementos se puede usar para la derivada de una función .Basta sustituir h por Δx:

$$f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Y queda como se muestra a continuación:

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Podemos decir que la derivada de $\boldsymbol{f}$ es el límite de la razón del incremento Δy de la variable dependiente al incremento Δx de la variable independiente, cuando Δx **tiende a cero**.

En el tema anterior pudo verse que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la pendiente de la recta secante que pasa por *P* y *Q*. De la definición geométrica se advierte que si $\boldsymbol{f'(x)}$ existe, entonces:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f^{'}(x)$ cuando $\Delta x \approx 0$, o bien $\Delta y \approx f^{'}(x)\Delta x$ cuando $\Delta x \approx 0$.

En la siguiente definición se da un nombre especial a $f^{'}(x)\Delta x$.

Sea $y = f'(x)$ donde f es una función derivable, y sea Δx un incremento de x, presenta las siguientes características:

- La diferencial dx de la variable independiente x es: $dx = \Delta x$.
- La diferencial dy de la variable dependiente y es:

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

En la definición anterior, puede verse que la diferencial (variación) dx de la variable independiente x es igual a su incremento Δx. Sin embargo, esto no sucede con la variable dependiente y. Como podemos ver en el valor de dy depende de x y de dx .

Si ambos lados de la ecuación $dy = f'(x)dx$ de la anterior definición se dividen entre dx (suponiendo que $dx \neq 0$), se obtiene lo siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Por lo tanto, la derivada de $f'(x)$ puede expresarse como el cociente de dos diferenciales. Esto justifica la notación $\frac{dy}{dx}$ que se presentó para la derivada de $y = f(x)$ con respecto a x.

Entonces podemos concluir lo siguiente:

Si $\Delta x \approx 0$, entonces $\Delta y \approx dy \approx f'(x)dx$

Por lo tanto , si $y = f(x), dy$ puede usarse como un valor aproximado del incremento exacto Δy de la variable dependiente correspondiente a un incremento pequeño $\Delta x \ de \ x$. Esta observación es útil para las aplicaciones en que se requiere una estimación de la variación de y.

El límite por incremento es la derivada de una función, que se define como el límite de la razón entre el incremento de la función y el incremento de la variable independiente cuando este último tiende a cero

Ejemplo; derivada por el método de los cuatro pasos

$$y = 2x^2 - 7x + 6$$

1. Primer paso, sustituimos y por $y + \Delta y$ asi como x por $x + \Delta x$ y se calcula el nuevo valor de la función

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) + 6$$

$$y + \Delta y = 2(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2) - 7(x + \Delta x) + 6$$

$$y + \Delta y = 2x^2 + 4x(\Delta x) + 2(\Delta x)^2) - 7x - 7\Delta x + 6$$

2. En el segundo paso, se resta el valor de la función original a la del primer paso

$$(y + \Delta y = 2x^2 + 4x(\Delta x) + 2(\Delta x)^2) - 7x - 7\Delta x + 6)$$
$$-(y = 2x^2 - 7x + 6)$$

$$\cancel{y} + \Delta y = \cancel{2x^2} + 4x(\Delta x) + 2(\Delta x)^2) \cancel{- 7x} - 7\Delta x \cancel{+ 6}$$
$$\cancel{-y} = \cancel{-2x^2} \cancel{+ 7x} - 6$$

$$\Delta y = 4x(\Delta x) + 2(\Delta x)^2 - 7\Delta x$$

3. En el tercer paso, se divide Δy (incremento de la función) por Δx (incremento de la variable independiente)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x(\Delta x) + 2(\Delta x)^2 - 7\Delta x}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{2(\Delta x)^2}{\Delta x} - \frac{7\Delta x}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x - 7$$

4. Se calcula el límite de este cociente cuando el $\Delta x \to 0$ (el incremento de la variable independiente tiende a cero), el limite hallado es la derivada buscada

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x - 7$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 2\Delta x - 7)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2(0) - 7$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x - 7$$

También se puede expresar

$$y' = \frac{dy}{dx}(2x^2 - 7x + 6) = 4x - 7$$

Referencia:

Instituto Consorcio Clavijero (s.f.) Incremento de una función. Recuperado de: https://belver.clavijero.edu.mx/cursos/nme/semestre6/calcint/s1/contenidos/incremento_de_una_funcin.html

Dra. Ballesteros Quintero, Celia Blanca