

DERIVADA, CONCEPTO Y REPRESENTACIONES

Consideremos una función real de variable real $y = f(x)$ definida en un intervalo abierto (a, b) . Sea x_0 un elemento de (a, b) . La manera natural de comparar la variación que muestra el valor de la variable dependiente $y = f(x)$ cuando el valor de la variable independiente x experimenta en x_0 una variación $h \neq 0$, es considerar el cociente.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Al cociente, lo conocemos como cociente diferencial de la función en el punto x_0 correspondiente a la variación de magnitud h de la variable independiente, y lo denotamos con $\frac{\Delta y}{\Delta x}(x_0)(h)$.

Ejemplo

Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta y que la variable $d = d(t)$ mide su posición en el instante t con respecto a un punto de referencia dado. El cociente diferencial en un tiempo t_0 y para una variación de magnitud h en el tiempo, es la distancia recorrida en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$ dividida por el tiempo transcurrido (es decir, h):

$$\frac{\Delta d}{\Delta t}(t_0)(h) = \frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h},$$

$h \neq 0$.

A este valor se le conoce como velocidad media de la partícula en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$ (o el intervalo $[t_0 + h, t_0]$ si $h < 0$):

Velocidad media en $[t_0, t_0 + h] = \frac{\Delta d}{\Delta t}(t_0)(h)$.

Nota

La magnitud h de la variación de la variable independiente siempre se toma distinta de cero y el valor del cociente diferencial de una función en un punto x_0 depende del valor de h . En el sentido anterior, el cociente diferencial de una función en el punto x_0 es una función de magnitud h de la variación de la variable independiente.

A partir del concepto de cociente diferencial en un punto o valor x_0 , enunciamos a

continuación de la definición de derivada.

Sea $y = f(x)$ una función real definida en el intervalo (a, b) y x_0 un valor de la variable independiente (a, b) . Se define **la derivada de la función $f(x)$ en el punto x_0** como el límite (*cuando este exista*) del cociente diferencial de la función en x_0 cuando la magnitud h de la variación de la variable independiente tiende a cero. Cuando existe la derivada de la función

$y = f(x)$ en un punto x_0 esta se denota con $\frac{df}{dx}(x_0)$; es decir,

Ejemplo

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Para la función

Y se dice que la función es **derivable en x_0** .

$f(x) = x^2$,

la derivada en el punto $x_0 = 2$ tiene el valor 4, pues aplicando la definición se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dx^2}{dx}(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^2 - (2)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4 + h)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (4 + h)$$

$$= 4 + 0 = 4$$

Notación para la derivada

Notación Lagrange: f'

Notación Leibniz: $\frac{dy}{dx}$

Notación de Newton: $\dot{y}$

Referencia:

Flores Espinoza, R.; Valencia Arvizu, M. A.; Dávila Rascón, G. & García Alvarado, M. G.
(2008). Fundamentos del Cálculo. Editorial Garabatos.