# DERIVACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS SIMPLES A PARTIR DE SU DEFINICIÓN

A continuación, calcularemos la derivada de algunas funciones elementales utilizando directamente la definición de derivada en un punto. Después, luego de haber presentado las principales reglas de derivación, aumentaremos la lista de funciones y sus derivadas mediante la aplicación de esas reglas.

En lo que sigue, $x_0$ es un valor de la variable independiente en el que la función en cuestión es diferenciable y $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de variaciones tal que $h_i \neq 0$ para todo $i = 1,2, \dots,$ y $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \to 0$.

1. La derivada en $x_0$ de la función constante $f(x) = c$ es igual a cero:

$$\frac{dc}{dx}(x_0) = 0$$

Para probarlo, consideramos la sucesión correspondiente de cocientes diferenciales

$$\frac{\Delta c}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{c - c}{h_i} = 0$$

Esta sucesión es constante; su valor es cero para $i = 1,2, \dots$. Y por lo tanto, converge a cero. Luego,

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = 0$$

2. La derivada en $x_0$ de la función identidad $f(x) = x$ es igual a 1

La Sucesión correspondiente de cocientes diferenciales,

$$\frac{\Delta x}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{x_0 + h_i - x_0}{h_i} = \frac{h_i}{h_i} = 1$$

Es constante e igual a uno y , por lo tanto, converge a uno. Luego,

$$\frac{dx}{dx}(x_0) = 1.$$

3. La derivada en $(x_0)$ de la función $f(x) = x^2$ es igual a $2x_0$:

$$\frac{dx^2}{dx}(x_0) = 2x_0$$

La sucesión correspondiente de cocientes diferenciales toma la forma

$$\frac{\Delta x^2}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{(x_0 + h_i)^2 - {x_0}^2}{h_i} = 2x_0$$

Así,

$$\frac{dx^2}{dx}(x_0) = 2x_0$$

4. La derivada en $x_0$ de la función $f(x) = x^k$ donde $k$ un número natural es igual a $k{x_0}^{k-1}$ :

$$\frac{dx^k}{dx}(x_0) = k{x_0}^{k-1}$$

Consideramos la sucesión correspondiente de cociente diferenciales

$$\frac{\Delta x^k}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{(x_0 + h_i)^k - {x_0}^k}{h_i}$$

Por el teorema del binomio tenemos

$$(x_0 + h_i)^k = \sum_{j=0}^{j=k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!} {x_0}^{k-j} h_i^j,$$

Y entonces, el cociente diferencial es

$$\frac{\Delta x^k}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{1}{h_i}\left[\sum_{j=0}^{j=k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!}{x_0}^{k-j} h_i^j - x_0^k\right]$$

$$= \frac{1}{h_i}\sum_{j=0}^{j=k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!}{x_0}^{k-j} h_i^j =$$

$$= kx_0^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}x_0^{k-2}h_i + \frac{k(k-1)(k-3)}{3!}x_0^{k-3}h_1^2 + \cdots + kx_0h_i^{k-1} + h_i^k.$$

Calculando el límite cuando $h_i \to 0$ obtendremos

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{\Delta x^k}{\Delta x}(x_0)(h_i)$$

$$= \lim_{h_i \to 0}\left[kx_0^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}x_0^{k-2}h_i + \frac{k(k-1)(k-3)}{3!}x_0^{k-3}h_1^2 + \cdots + kx_0h_i^{k-1} + h_i^k\right]$$

$$= kx_0^{k-1}$$

Ya que el límite de cada uno de los términos que contiene alguna potencia de $h_i$ es cero

5. La derivada de la función $f(x) = sen\ x$ en el punto $x_0$ es igual a $\cos x_0$:

$$\frac{d \sin x}{dx}(x_0) = \cos x_0$$

Consideramos la sucesión correspondiente de cocientes diferenciales

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{\sin(x_0 + h_i) - \sin x_0}{h_i} =$$

$$= \frac{\sin x_0 \cos h_i - \sin x_0}{h_i}$$

$$= \cos x_0 \frac{\sin h_i}{h_i} + \sin x_0 \left(\frac{\cos h_i - 1}{h_i}\right)$$

Tomando en cuenta que

$\lim_{h_i \to 0} \frac{\sin h_i}{h_i} = 1$ y $\lim_{h_i \to 0} \frac{\cos h_i - 1}{h_i} = 0$

Tenemos

$$\frac{d \sin x}{dx}(x_0) = \lim_{h_i \to 0} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \cos x_0.$$

6. La derivada de la función $f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x}$ en el punto $x_0 \neq k\pi$ para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ es igual a $-\cot x_0 \csc x_0$:

$$\frac{d \csc(x)}{dx}(x_0) = -\cot x_0 \csc x_0$$

Consideremos

$$\frac{\Delta \csc x}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{\frac{1}{\sin(x_0 + h_i)} - \frac{1}{\sin x_0}}{h_i}$$

$$= \frac{\sin x_0 - \sin(x_0 + h_i)}{h_i \sin(x_0 + h_i) \sin x_0}$$

$$= \frac{\sin x_0 - \sin(x_0 + h_i)}{h_i} \frac{1}{\sin(x_0 + h_i)} \frac{1}{\sin x_0}$$

Tomando en cuenta que

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{\sin(x_0 + h_i) - \sin x_0}{h_i} = \cos x_0$$

Y que $\sin x_0 \neq 0$, se tiene

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{1}{\sin(x_0 + h_i)} = \frac{1}{\sin x_0}$$

Ahora, tomando al cociente diferencial cuando $h_i \to 0$ y aplicando las propiedades de las sucesiones convergentes, se obtiene

$$\frac{d \csc x}{dx}(x_0) = -\frac{\cos x_0}{(\sin x_0)^2} = -\csc x_0 * \cot x_0.$$

**Referencia:**

Flores Espinoza, R.; Valencia Arvizu, M. A.; Dávila Rascón, G. & García Alvarado, M. G. (2008). Fundamentos del Cálculo. Editorial Garabatos.