DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Se define el número e por la ecuación

$$e = \lim_{h \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h$$

Entonces e puede ser representado como $\lim_{k \to 0}(1 + k)^{1/k}$. Además se puede demostrar que

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 2.71828 \ldots$$

El número $servirá$ como base de los logaritmos naturales

Funciones logarítmicas

Sea $a > 0$ y $a \neq 1$. Si $a^y = x$, entonces definimos $y = \log_a x$

Fórmulas de derivación

1. La derivada de una función logarítmica, de fórmula general $loga\, u(x)$, el resultado es igual al cociente de la derivada de la función por la propia función y todo ello multiplicado por el logaritmo en base a del número e.

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{u'}{u}\log_a e$$

Donde $a > 0$ $a \neq 1$

Ejemplo $f(x) = \log_3(2x)$

$$f'(x) = \frac{2}{2x}\log_3 e$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}\log_3 e$$

2. La derivada de logaritmo natural de una función es igual al cociente de la derivada de la función entre la propia función

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{u'}{u}$$

Ejemplo $f(x) = \ln(x^3 + 2)$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 2}$$

3. La derivada de la función exponencial, cuando tenemos una constante como base es igual a la función exponencial multiplicado por el logaritmo natural de a y por la derivada del exponente

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \, \frac{d}{dx}u$$

Donde $a > 0$

Ejemplo $f(x) = a^{6x^2}$

$$f'(x) = a^{6x^2} \ln a \, \frac{d}{dx}6x^2$$

$$f'(x) = a^{6x^2} \ln a \, (12x)$$

$$f'(x) = 12x \, a^{6x^2} \ln a$$

4. La derivada si la base de la función exponencial es el número “e”, su derivada es igual a la derivada del exponente por el número elevado al exponente.

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{d}{dx}u$$

Ejemplo $f(x) = e^{x^2}$

$$f'(x) = e^{x^2} \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$f'(x) = e^{x^2}(2x)$$

$$f'(x) = 2x \, e^{x^2}$$

Fórmulas de derivadas

Derivadas de funciones algebraicas	
1. $\frac{d}{dx}c = 0$	
2. $\frac{d}{dx}x = 1$	
3. $\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{d}{dx}u + \frac{d}{dx}v - \frac{d}{dx}w$	
4. $\frac{d}{dx}cx = c$	
5. $\frac{d}{dx}cv = c\frac{d}{dx}v$	
6. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$	
7. $\frac{d}{dx}v^n = n(v)^{n-1} * \frac{d}{dx}v$	
8. $\frac{d}{dx}uv = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u$	
9. $\frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{v\frac{d}{dx}u - u\frac{d}{dx}v}{v^2}$	
10.	$\frac{d}{dx}\frac{c}{v} = \frac{-c}{v^2}\frac{d}{dx}v$
11.	$\frac{d}{dx}\frac{v}{c} = \frac{1}{c}\frac{d}{dx}v$
12.	$\frac{d}{dx}\sqrt[n]{u} = \frac{\frac{d}{dx}u}{n * \sqrt[n]{u^{n-1}}}$
13.	$\frac{d}{dx}\sqrt[2]{u} = \frac{\frac{d}{dx}u}{2\sqrt{u}}$
Derivadas de funciones trascendentes	
Derivadas de funciones trigonométricas	
14.	$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\,\frac{d}{dx}u$
15. $-\sin u\,\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}\cos u =$
16.	$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\,\frac{d}{dx}u$
17.	$\frac{d}{dx}\cot u = \csc^2 u\,\frac{d}{dx}u$

18.	$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \,\frac{d}{dx}u$
19.	$\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \,\frac{d}{dx}u$
20.	$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} * \frac{d}{dx}u$
Derivadas de funciones trigonométricas inversas	
21.	$\frac{d}{dx}\cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} * \frac{d}{dx}u$
22.	$\frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} * \frac{d}{dx}u$
23.	$\frac{d}{dx}\cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2} * \frac{d}{dx}u$
24.	$\frac{d}{dx}\sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} * \frac{d}{dx}u$
25.	$\frac{d}{dx}\csc^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} * \frac{d}{dx}u$
Derivadas de funciones logarítmicas	
26.	$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{u'}{u}\log_a e$
27.	$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{u'}{u}$
28.	$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \,\frac{d}{dx}u$
29.	$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{d}{dx}u$

Referencia:

Dra. Ballesteros Quintero, Celia Blanca