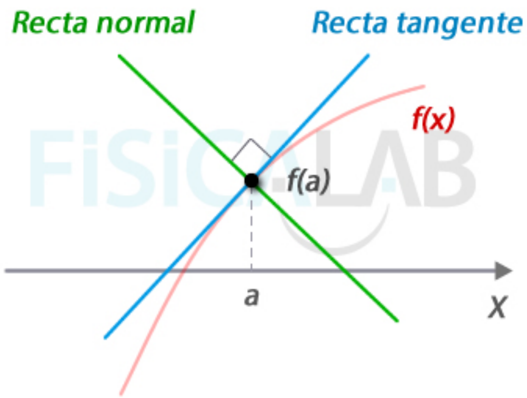
ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE Y NORMAL A LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN

Una recta se dice que es **tangente** a una función en un punto cuando pasa por ese punto y su pendiente es *f'(a)*. La **recta normal** a una función en un punto, por su parte, es la que pasa por dicho punto y tiene pendiente *-1/f'(a)*.

Rectas tangente y normal



En azul, la recta tangente a la función *f(x)*, en rojo, en *x=a*. En verde, la recta normal a la función en el mismo punto. Observa que ambas son perpendiculares.

Ya sabes que una recta queda definida cuando conocemos dos puntos por los que pasa, pero también cuando conocemos un punto por el que pasa y la pendiente de la misma. En este caso, el punto, común a ambas, es *(a,f(a))*.

Para el cálculo de las pendientes (*f'(a)* y *-1/f'(a)* respectivamente) se hace imprescindible conocer el valor de la derivada de la función en el punto.

Expresión de la recta tangente

Se define la **recta tangente** a una función en un punto de abscisa *x=a* como aquella recta que pasa por *(a,f(a))* y tiene por pendiente la derivada de la función en el punto, *f'(a)*.

Su expresión es:

$$y - f(a) = f'(a) * (x - a)$$

Demostración

Sabemos que la ecuación de la recta viene dada por $y = mx + n$ siendo:

- *m* la pendiente de la misma
- *n* es la ordenada en el origen, es decir, donde la recta corta al eje *y*

Por tanto, para determinar la ecuación de la recta tangente debemos calcular *m* y *n*.

Por la definición de recta tangente que hemos dado sabemos que:

1. La pendiente de la recta tangente en *x=a* coincide con el valor de la derivada en *x=a*, con lo que *m=f'(a)*
2. La recta *'toca'* a la función en el punto, es decir, pasa por *(a,f(a))*. Sustituyendo en la ecuación genérica de la recta *x* por *a*, e *y* por *f(a)*, nos queda *f(a)=m·a+n*

Sustituyendo la ecuación de 1 en 2, obtenemos:

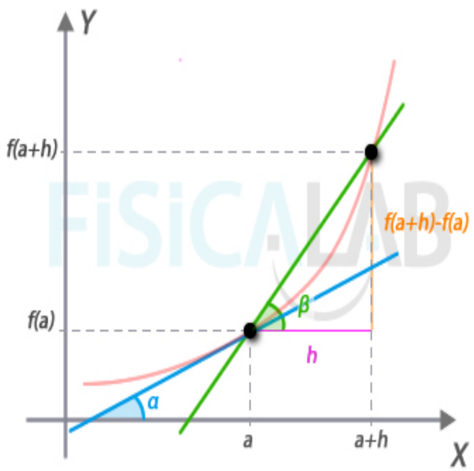
$$f(a) = m \cdot a + n \xRightarrow[m=f'(a)]{} f(a) = f'(a) \cdot a + n \Rightarrow n = f(a) - f'(a) \cdot a$$

Ya tenemos, por tanto, los valores de m y n que buscamos .Sustituyendo y reagrupando obtenemos la expresión buscada:

$$y = \underbrace{f'(a)}_{m} \cdot x + \underbrace{f(a) - f'(a) \cdot a}_{n} \Rightarrow \boxed{y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)}$$

Relación con la secante

Tal y como veíamos al estudiar la tasa de variación instantánea a partir de la tasa de variación media, una manera alternativa de definir la recta tangente es considerarla como la **recta secante** que pasa por dos puntos infinitamente próximos de la función.



Rectas secante y recta tangente

En verde hemos pintado la recta secante a la función en dos puntos de abscisas *a* y *a+h*. Observa que la pendiente de dicha recta viene determinada por la razón trigonométrica tangente del ángulo β que forma la recta con la horizontal.

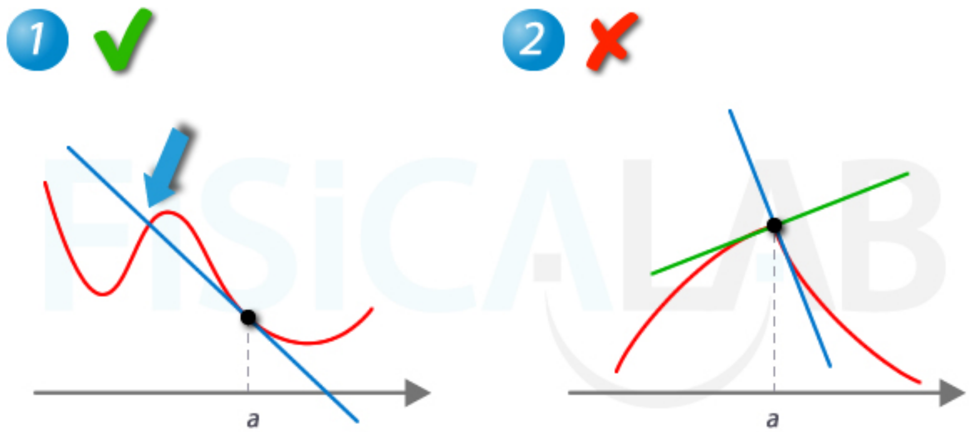
Efectivamente $m_{secante} = tan\beta = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Cuando aproximamos *a+h* a *a* obtenemos la recta secante, en azul. En este caso, su pendiente será

$$m_{tangente} = tan\alpha = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f^{'}(a)$$

En ocasiones se define la **recta tangente** como aquella que corta a la función en un único punto. Aunque es una definición muy intuitiva, estrictamente hablando se trata de una definición errónea.

Efectivamente, observa las siguientes gráficas:



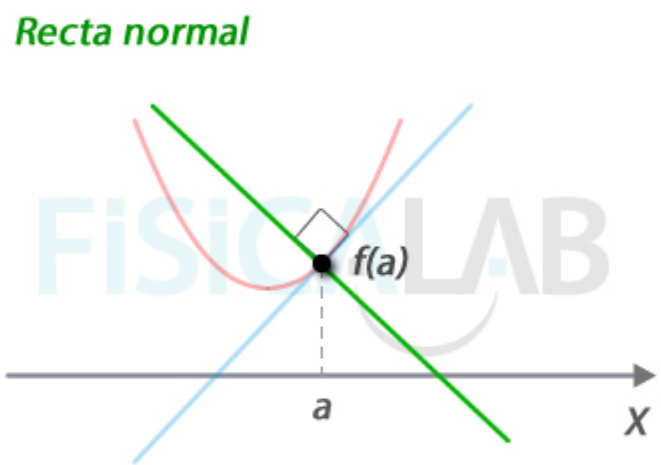
Definiciones erróneas de recta tangente

La recta azul, en 1, cumple la definición que dábamos a comienzos del apartado de recta tangente, es decir, pasa por el punto *(a,f(a))* y su pendiente es *f'(a)*, con lo que se trata de una recta tangente, *a pesar de que toca a la función en más de un punto*. Por otro lado, en 2, existen dos rectas que tocan la función en un único punto, la verde y la azul. Sin embargo, ninguna de ellas es la recta tangente porque se trata de un punto anguloso y no existe *f'(a)*.

Expresión de la recta normal

Se define la **recta normal** a una función en un punto de abscisa *x=a* como aquella recta que es perpendicular a la recta tangente en ese punto. Por tanto, pasa por *(a,f(a))* y tiene por pendiente *-1/f'(a)*. Su expresión es:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} * (x - a)$$



Recta normal

En verde, la recta normal a la función, representada en rojo claro, en *(a,f(a))*. Se trata de una recta perpendicular a la recta tangente, representada en azul claro.

Demostración

Siguiendo un procedimiento análogo al de la recta tangente tenemos:

1. La pendiente de la recta normal en *x=a* es *m=-1/f'(a)*
2. La recta *'toca'* a la función en el punto, es decir, pasa por *(a,f(a))*. Sustituyendo en la ecuación genérica de la recta *x* por *a*, e *y* por *f(a)*, nos queda *f(a)=m·a+n*

Sustituyendo la ecuación de 1 en 2, obtenemos:

$$y = \underbrace{-\frac{1}{f\prime(a)}}_{m} \cdot x + \underbrace{f(a) - f\prime(a) \cdot a}_{n} \Rightarrow \boxed{y - f(a) = -\frac{1}{f\prime(a)} \cdot (x - a)}$$

Recuerda que si dos rectas son perpendiculares, se cumple que el producto de sus pendientes vale -1:

$$m_1 \perp m_2 \Rightarrow m_1 * m_2 = -1$$

Donde:

- m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas consideradas

Referencia:

Fernández, José L. (s.f.) Recta Tangente y Recta Normal. Recuperado de: https://www.fisicalab.com/apartado/rectas-tangente-normal