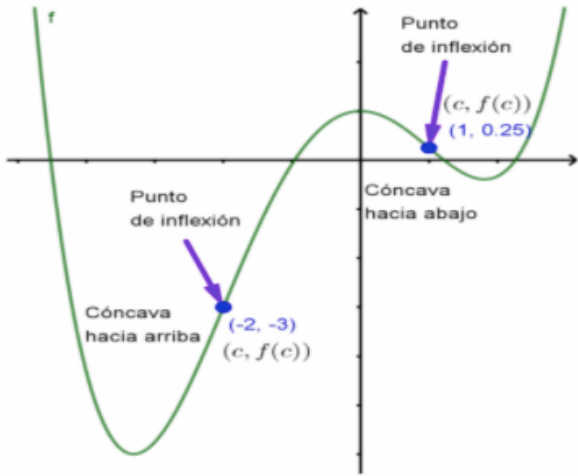


MÁXIMOS Y MÍNIMOS POR EL CRITERIO DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA

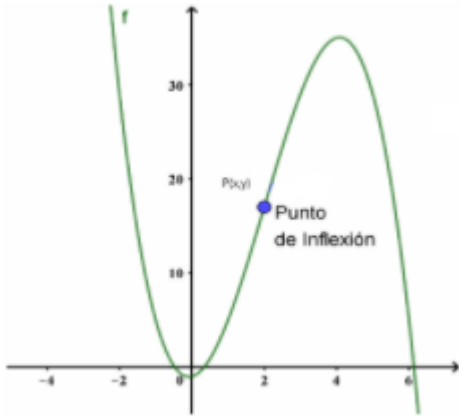
Iniciamos con la idea de que la segunda derivada de una función también proporciona información sobre el comportamiento de dicha función. Para comenzar este estudio empecemos con las siguientes definiciones.

Definiciones	Ilustración
$f(x)$ es cóncava hacia abajo ($\cap$) en $x = a$ si $f''(a) < 0$. $f(x)$ es cóncava hacia arriba ($\cup$) en $x = b$ si $f''(b) > 0$.	

Además, consideramos que:

$f(x)$ tiene un punto de inflexión, es decir, cambio de concavidad en $x = d$ si cumple con las siguientes condiciones:

1. Que $f''(d) = 0$
2. Que f'' para un valor un poco menor que d , sea positivo (+) o negativo (-).
3. Que f'' para un valor un poco mayor que d , sea negativo (-) o positivo (+).



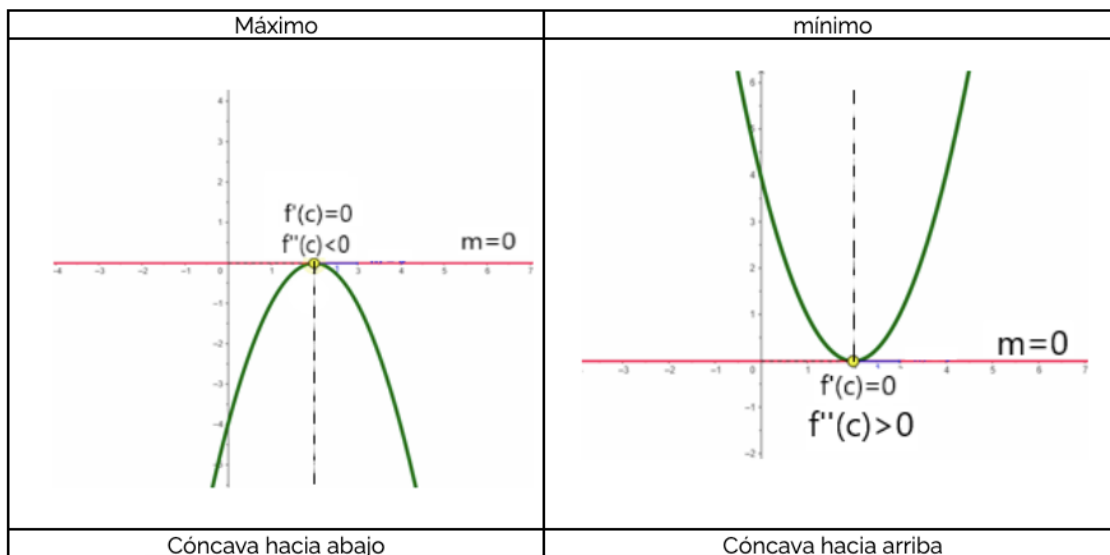
Vamos a utilizar las definiciones anteriores para aplicar el criterio de la segunda derivada para encontrar máximos y mínimos, así como otra definición muy importante para aplicar el criterio.

$f(x)$ tiene un **máximo** en $x = c$ si cumple con las siguientes condiciones:

1. Que $f'(c) = 0$
2. Que $f''(c) < 0$, entonces en $(c, f(x))$ es cóncava hacia abajo ($\cap$)

$f(x)$ tiene un **mínimo** en $x = c$ si cumple con las siguientes condiciones:

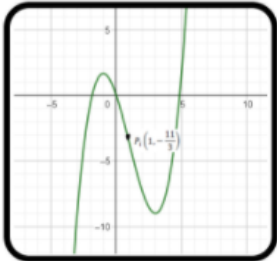
1. Que $f'(c) = 0$
2. Que $f''(c) > 0$, entonces en $(c, f(x))$ es cóncava hacia arriba ($\cup$).



Vamos a ver unos ejemplos para aplicar lo que acabamos de estudiar.

Ejemplo 1:

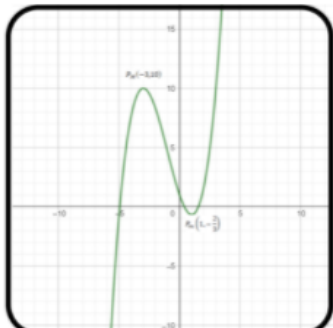
En la siguiente función, vamos a determinar las concavidades hacia abajo y hacia arriba y las coordenadas de sus puntos de inflexión.

Función	Procedimiento	Resultados
$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$	Paso 1: Derivar $y' = x^2 - 2x - 3$ $y'' = 2x - 2$	
	Paso 2: Hacer $y'' = 0$ para obtener los valores críticos para punto de inflexión. $2x - 2 = 0$ $x = 1$	$x = 1$ Valor crítico para punto de inflexión
	Paso 3: Evaluar si en $x = 1$ existe un punto de inflexión. $y''(0) = 2(0) - 2 = -2$; $f(x)$ es cóncava hacia abajo $y''(2) = 2(2) - 2 = +2$; $f(x)$ es cóncava hacia arriba	En $x = 1$ hay un punto de inflexión
	Paso 4: Calculamos la ordenada del punto de inflexión $y(1) = \frac{1}{3}(1)^3 - (1)^2 - 3(1)$ $y(1) = -\frac{11}{3}$	Punto de inflexión en: $P_i\left(1, -\frac{11}{3}\right)$
	Paso 5: Tabular, graficar y hacer tabla de resultados 	Resultados: $f(x)$: Es $\cap$ en $(-\infty, 1)$ Es $\cup$ en $(1, +\infty)$ Tiene un punto de inflexión en $P_i\left(1, -\frac{11}{3}\right)$.

Fuente: <https://www.geogebra.org/classic?lang-es>

Ejemplo 2:

Calcula los máximos y mínimos de la siguiente función aplicando el criterio de la segunda derivada.

Función	Procedimiento	Resultados
$y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x +$	Paso 1: Obtener la primera derivada, igualar a cero y obtener los valores críticos para máximo o mínimo. $y' = x^2 + 2x - 3$ $x^2 + 2x - 3 = 0$ $(x + 3)(x - 1) = 0$ $x_1 = -3, x_2 = 1$	$x_1 = -3, x_2 = 1$ Valores críticos para máximo o mínimo
	Paso 2: hallar la segunda derivada. $y'' = 2x + 2$	
	Paso 3: determinar si hay un máximo o un mínimo en cada valor crítico, aplicando el criterio de la segunda derivada. Para $x_1 = -3$: $y''(-3) = 2(-3) + 2 = -4; \cap \text{ hay un máximo}$ Buscamos la ordenada evaluando en la función: $y(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 + (-3)^2 - 3(-3) + 1 = 10$ $P_M(-3, 10)$ Para $x_2 = 1$: $y''(1) = 2(1) + 2 = 4; \cup \text{ hay un mínimo}$ Buscamos la ordenada evaluando en la función: $y(1) = \frac{1}{3}(1)^3 + (1)^2 - 3(1) + 1 = -\frac{2}{3}$ $P_m\left(1, -\frac{2}{3}\right)$	Hay un máximo en $P_M(-3, 10)$ Hay un mínimo en $P_m\left(1, -\frac{2}{3}\right)$
	Paso 4: Tabular, graficar y hacer tabla de resultados 	Resultados $f(x)$: Tiene un máximo en $P_M(-3, 10).$ Tiene un mínimo en $P_m\left(1, -\frac{2}{3}\right)$

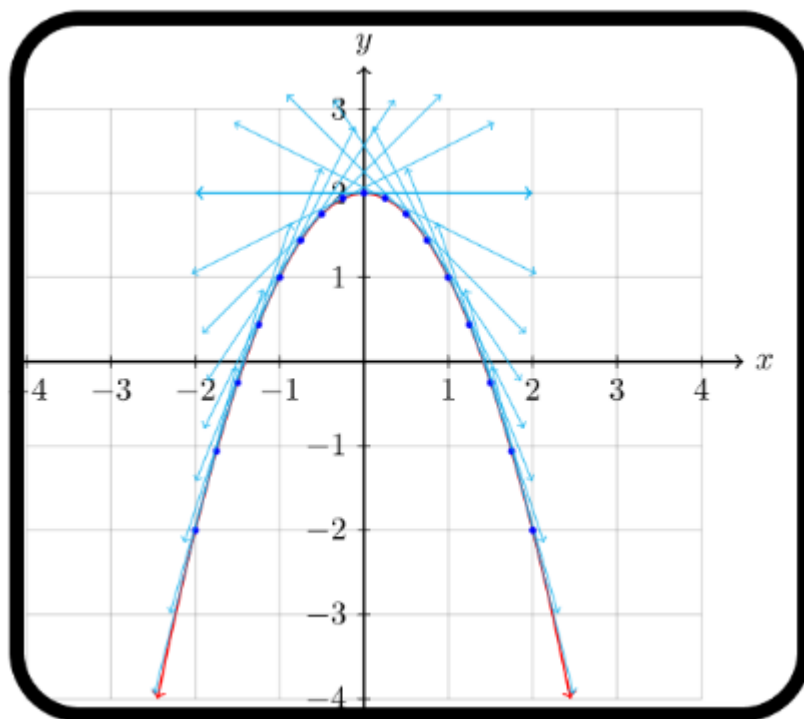
Concluimos la sesión mencionando que:

En esta lección aprendimos a clasificar los puntos de una función como máximos, mínimos, puntos de inflexión con base a la segunda derivada.

Ahora sabemos que la segunda derivada nos da información acerca de la primera derivada y la utilizamos para calcular los máximos y mínimos de la función.

También sabemos que la pendiente de las rectas tangentes disminuye conforme avanzamos sobre el eje (x). Es decir, para valores negativos, las pendientes de las rectas tangentes son positivas y para valores positivos de las rectas tangentes son negativas.

Esto significa que la razón de cambio de la derivada de la función en el intervalo que vemos en la gráfica de la figura es negativa, ya que las pendientes van decreciendo.



En conclusión, si la segunda derivada de la función evaluada en un punto crítico es negativa, entonces el punto crítico corresponde a un máximo.

De manera semejante, si la derivada de una función en un punto crítico es positiva, entonces el punto crítico es un mínimo de la función.

Pero se tiene un caso especial. Cuando el valor de la segunda derivada de la función es evaluado en el punto crítico y es cero. En este punto, la derivada deja de crecer (o decrecer) y empieza a decrecer (o crecer). A este punto crítico lo llamaremos punto de inflexión.

Referencia:

Nodo Universitario. Universidad de Guanajuato (2021) Clase digital 15: Criterio de la segunda derivada (Máximos y mínimos). Recuperado de:
<https://acortar.link/uuyMLT>

