OPTIMIZACIÓN

Aplicaciones de la derivada

Optimización

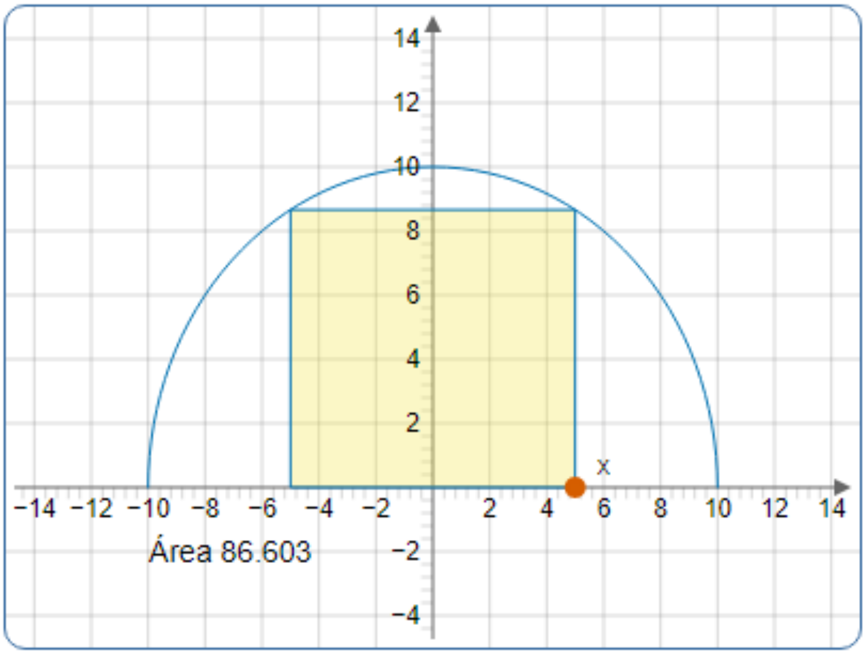
En los problemas en los que hay que optimizar una cantidad, ya sea buscar un máximo o un mínimo, los pasos suelen ser los siguientes.

1. Planteamos analíticamente la función a optimizar utilizando tantas variables como sean necesarias.
2. Buscamos las relaciones entre las diferentes variables usando los datos del enunciado y dejamos todas en función de una de ellas.
3. Derivamos, igualamos a cero y calculamos los puntos críticos.
4. Comprobamos con la segunda derivada o con el estudio de la monotonía que tenemos un máximo o un mínimo relativo.

Ejemplo

Vamos a calcular las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio 10.

En la siguiente representación gráfica, puedes desplazar el punto rojo.
El área del rectángulo correspondiente se calculará automáticamente.



1. Según hemos comentado, el primer paso es encontrar la función a optimizar. Si llamamos x al extremo inferior derecho del rectángulo e y a la altura, el área es $2xy$.
2. ¿Cómo podemos relacionar x e y? Hay varias formas de hacerlo: la circunferencia centrada en el origen y de radio 10 está formada por los puntos (x, y) que cumplen la ecuación.

$$x^2 + y^2 = 100$$

con lo que despejando $y = \sqrt{100 - x^2}$ ya podemos escribir la función a optimizar:

$$f\colon [0,10] \to \mathbb{R}, f(x) = 2xy = 2x\sqrt{100 - x^2}$$

3. Derivamos

$$f'(x) = 2\left(\sqrt{100 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{100 - x^2}}\right) = 2\left(\frac{100 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}}\right) = \frac{2(100 - 2x^2)}{\sqrt{100 - x^2}}$$

E igualamos a cero

$$f'(x) = 0 \; que \;\; equivale \; a \; 100 - 2x^2 = 0$$

Por lo tanto, las raíces son $-5\sqrt{2}$ y $5\sqrt{2}$. Como la x tiene que ser positiva, llegamos a que la función tiene un punto crítico en $5\sqrt{2}$

4. Para comprobar que es un máximo, vemos que la segunda derivada es negativa:

$$f''(x) = -\frac{6x}{\sqrt{100 - x^2}} - \frac{2x^3}{(100 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Y $f'''(5\sqrt{2}) = -8$

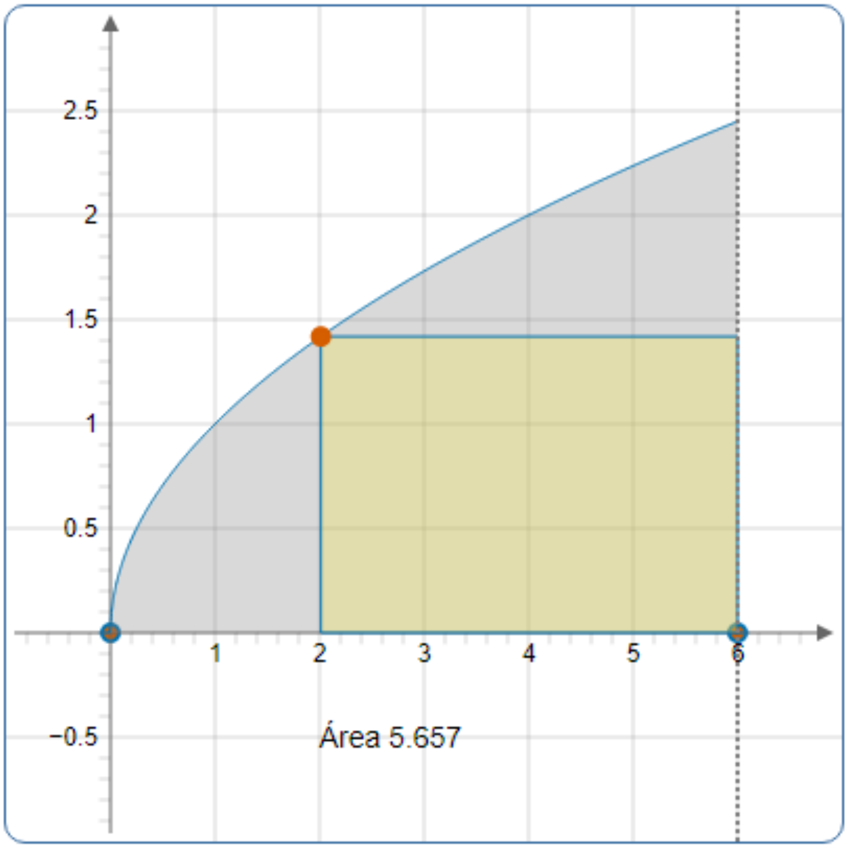
También podemos comprobar si es un máximo, estudiando el signo de la primera derivada a ambos lados del punto crítico. En este caso, el signo de $f'(x)$ queda determinado por el signo de $g(x) = 100 - 2x^2$ evaluando g en por ejemplo $5\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ y $5\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ obtenemos aproximadamente 3.62 y -4.48 , respectivamente. De aquí deducimos que la función f crece a la izquierda de $5\sqrt{2}$ se alcanza un máximo relativo.

5. El área máxima es 100.

Ejemplo

Dibuja la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}, x = 6, y = 0$ y calcula las dimensiones del rectángulo inscrito de lados paralelos a los ejes y que tenga máxima área.

Al ser un rectángulo inscrito en dichas gráficas y de lados paralelos a los ejes, dos de sus lados se tienen que apoyar en y=0 y en x=6 respectivamente. Por lo tanto tiene que tener el siguiente aspecto.



El área que hay que maximizar es, por tanto, $f(x) = (6 - x)\sqrt{x}$, que alcanza el valor máximo $4\sqrt{2}$ en $x = 2$

Referencia:

GitHub Cursos 0 fc (s.f.). Optimización. Recuperado de: https://cursos-0-fc-ugr.github.io/Matematicas/06-derivadas-app-optimizacion.html