

RAZÓN DE CAMBIO

En esta sección veremos algunas aplicaciones de la derivada, centrándonos en su interpretación como la tasa de cambio de una función. Estas aplicaciones incluyen la aceleración y la velocidad en física, las tasas de crecimiento de la población en biología y las funciones marginales en economía.

Fórmula de la cantidad de cambio

Una de las aplicaciones de las derivadas es estimar un valor desconocido de una función en un punto utilizando un valor conocido de la función en algún punto dado junto con su tasa de cambio en el punto dado. Si los valores de $f(x)$ es una función definida en un intervalo $[a, a + h]$, entonces la **cantidad de cambio** de $f(x)$ sobre el intervalo es el cambio en los valores y de la función en ese intervalo y viene dada por:

$$f(a + h) - f(a)$$

La **tasa de cambio** de la función f en ese mismo intervalo es la relación entre la cantidad de cambio en ese intervalo y el cambio correspondiente en los valores x . Viene dado por:

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Como sabemos, la tasa de cambio instantánea de $f(x)$ en a es su derivada.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Para valores suficientemente pequeños de h , $f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Podemos entonces resolver para $f(a+h)$ a fin de obtener la fórmula de la cantidad de cambio:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$$

Podemos utilizar esta fórmula si solo conocemos $f(a) + f'(a)$ y deseamos estimar el valor de $f(a+h)$. Por ejemplo, podemos utilizar la población actual de una ciudad y su tasa de crecimiento para estimar su número en un futuro próximo. Como podemos ver en la siguiente figura, estamos aproximando $f(a+h)$

Por las coordenadas y en $a+h$ en la línea tangente a $f(x)$ en $x=a$. Observe que la exactitud de esta estimación depende del valor de h así como del valor de $f'(a)$.

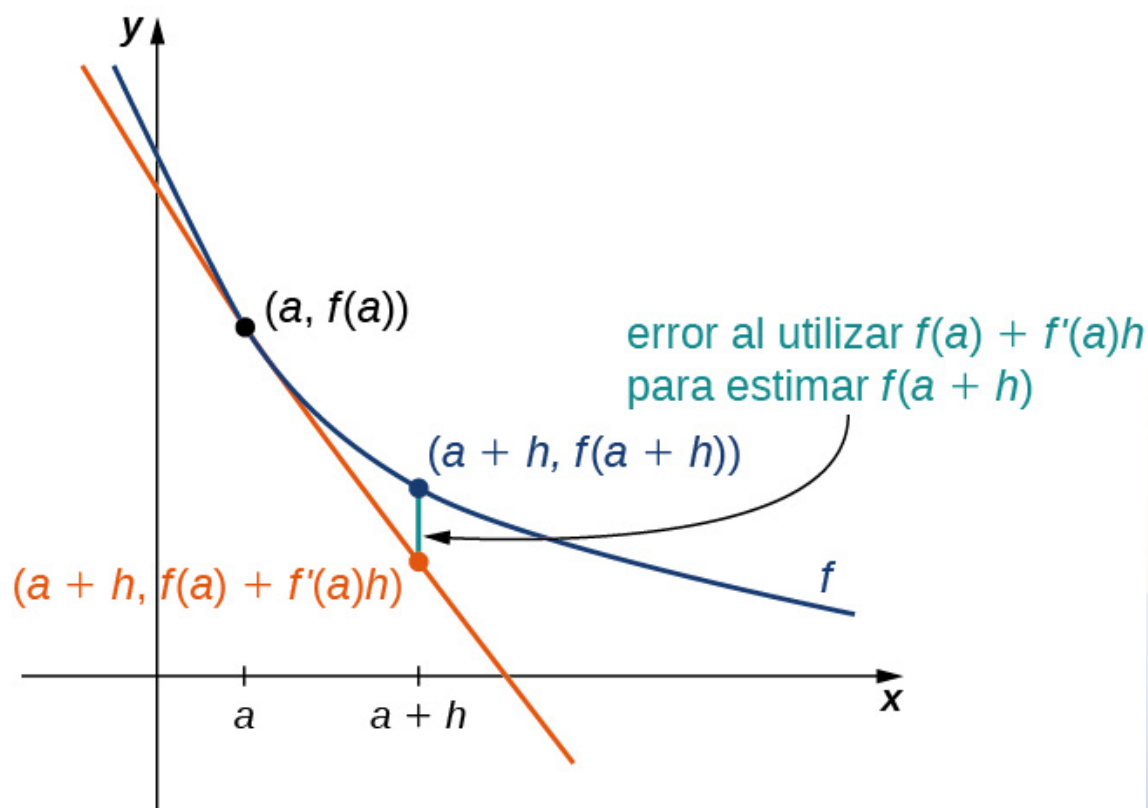


Figura. El nuevo valor de una cantidad modificada es igual al valor original más la tasa de cambio multiplicada por el intervalo de cambio: $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$.

Ejemplo

Estimación del valor de una función

Si los valores de $f(3) = 2$ y $f'(3) = 5$, estime $f(3,2)$.

[Show/Hide Solution]

Solución

Comience por calcular h . Tenemos $h = 3,2 - 3 = 0,2$. Por lo tanto,

$$f(3,2) = f(3 + 0,2) \approx f(3) + (0,2) f'(3) = 2 + 0,2(5) = 3.$$

Movimiento a lo largo de una línea

Otro uso de la derivada es el de analizar el movimiento a lo largo de una línea. Describimos la velocidad como la tasa de cambio de posición. Si tomamos la derivada de la velocidad, podemos encontrar la aceleración, o la tasa de cambio de la velocidad. También es importante presentar la idea de **rapidez**, que es la magnitud de la velocidad. Así, podemos enunciar las siguientes definiciones matemáticas.

DEFINICIÓN

Supongamos que $s(t)$ es una función que da la posición de un objeto en el tiempo t .

La velocidad del objeto en el tiempo t viene dada por $v(t) = s'(t)$.

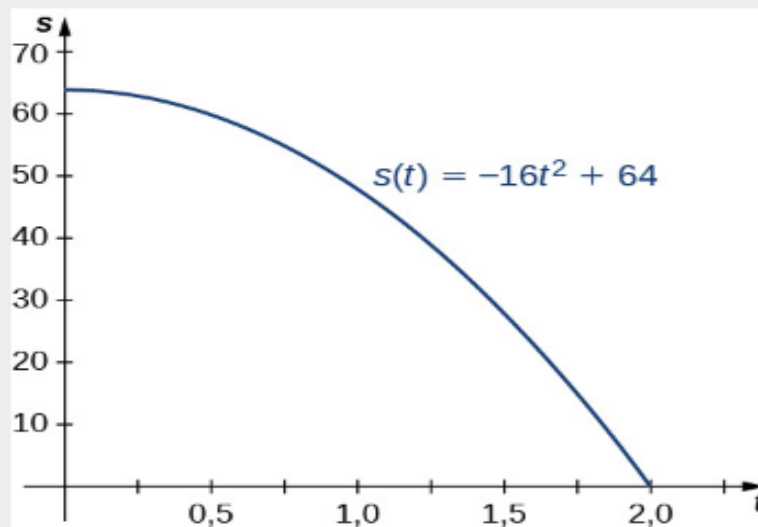
La rapidez del objeto en el momento t viene dada por $|v(t)|$.

La aceleración del objeto en t viene dada por $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Ejemplo

Comparación de la velocidad instantánea y la velocidad media

Se deja caer una pelota desde una altura de 64 ft. Su altura sobre el suelo (en ft) t segundos después viene dada por $s(t) = -16t^2 + 64$.



- ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota cuando toca el suelo?
- ¿Cuál es la velocidad media durante su caída?

Solución

Lo primero que hay que hacer es determinar el tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo. Para ello, defina $s(t) = 0$. Resolución de problemas $-16t^2 + 64 = 0$, obtenemos $t = 2$, para que la pelota tarde 2 segundos en llegar al suelo.

- La velocidad instantánea de la pelota al golpear el suelo es $v(2)$. Dado que $v(t) = s'(t) = -32t$, obtenemos $v(2) = -64$ ft/s.
- La velocidad media de la pelota durante su caída es

$$v_{ave} = \frac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = \frac{0 - 64}{2} = -32 \text{ ft/s.}$$

Ejemplo

Interpretación de la relación entre $v(t)$ y $a(t)$

Una partícula se mueve a lo largo de un eje de coordenadas en la dirección positiva hacia la derecha. Su posición en el tiempo t viene dada por $s(t) = t^3 - 4t + 2$. Calcule $v(1)$ y $a(1)$ y utilice estos valores para responder las siguientes preguntas.

- La partícula se mueve de izquierda a derecha o de derecha a izquierda en el tiempo $t = 1$?
- ¿La partícula se acelera o se ralentiza en el tiempo $t = 1$?

Solución

Comience por calcular $v(t)$ y $a(t)$.

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 4 \text{ y } a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t.$$

Al evaluar estas funciones en $t = 1$, obtenemos $v(1) = -1$ y $a(1) = 6$.

- Dado que $v(1) < 0$, la partícula se mueve de derecha a izquierda.
- Dado que $v(1) < 0$ y $a(1) > 0$, la velocidad y la aceleración actúan en direcciones opuestas. En otras palabras, la partícula se acelera en la dirección opuesta a la que viaja, haciendo que $|v(t)|$ disminuya. La partícula se ralentiza.

Ejemplo

Posición y velocidad

La posición de una partícula que se mueve a lo largo de un eje de coordenadas viene dada por $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 4, t \geq 0$.

- Halle $v(t)$.
- ¿En qué tiempo(s) la partícula está en reposo?
- ¿En qué intervalos de tiempo se mueve la partícula de izquierda a derecha? ¿De derecha a izquierda?
- Use la información obtenida para trazar la trayectoria de la partícula a lo largo de un eje de coordenadas.

Solución

- a. La velocidad es la derivada de la función de posición:

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 18t + 24.$$

- b. La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$, así que establezca $3t^2 - 18t + 24 = 0$. Factorizando el lado izquierdo de la ecuación se obtiene $3(t - 2)(t - 4) = 0$. Al resolver encontramos que la partícula está en reposo en $t = 2$ y $t = 4$.
- c. La partícula se mueve de izquierda a derecha cuando $v(t) > 0$ y de derecha a izquierda cuando $v(t) < 0$. La [Figura 3.23](#) ofrece el análisis del signo de $v(t)$ por $t \geq 0$, pero no representa el eje a lo largo del cual se mueve la partícula.



Figura 3.23 El signo de $v(t)$ determina la dirección de la partícula.

Dado que $3t^2 - 18t + 24 > 0$ sobre $[0, 2) \cup (4, +\infty)$, la partícula se mueve de izquierda a derecha en estos intervalos.

Dado que $3t^2 - 18t + 24 < 0$ sobre $(2, 4)$, la partícula se mueve de derecha a izquierda en este intervalo.

- d. Antes de dibujar el gráfico de la partícula, necesitamos conocer su posición en el momento en que comienza a moverse ($t = 0$) y en los momentos en que cambia de dirección ($t = 2, 4$). Tenemos $s(0) = 4$, $s(2) = 24$, y $s(4) = 20$. Esto significa que la partícula comienza en el eje de coordenadas en 4 y cambia de dirección en 0 y 20 en el eje de coordenadas. La trayectoria de la partícula se muestra en un eje de coordenadas en la [Figura 3.24](#).

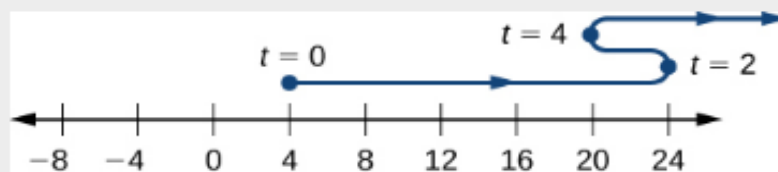


Figura 3.24 La trayectoria de la partícula puede determinarse analizando $v(t)$.

Punto de control

Una partícula se mueve a lo largo de un eje de coordenadas. Su posición en el tiempo t viene dada por $s(t) = t^2 - 5t + 1$. ¿La partícula se mueve de derecha a izquierda o de izquierda a derecha en el momento $t = 3$?

Cambio de población

Además de analizar la velocidad, la rapidez, la aceleración y la posición, podemos utilizar las derivadas para analizar varios tipos de poblaciones, incluso aquellas tan diversas como colonias de bacterias y ciudades. Podemos utilizar una población actual, junto con la tasa de crecimiento, para estimar el tamaño de una población en el futuro. La tasa de crecimiento de la población es la tasa de cambio de una

población y, en consecuencia, puede representarse mediante la derivada del tamaño de la población.

DEFINICIÓN

Si los valores de $P(t)$ es el número de individuos de una población, entonces la tasa de crecimiento de la población de $P(t)$ se define como $P'(t)$.

Ejemplo

Estimación de una población

La población de una ciudad se triplica cada 5 años. Si su población actual es de 10.000 habitantes, ¿cuál será su población aproximada dentro de 2 años?

[Show/Hide Solution]

Solución

Supongamos que $P(t)$ es la población (en miles) t años a partir de este momento. Así, sabemos que $P(0) = 10$ y con base a la información, prevemos $P(5) = 30$. Ahora estime $P'(0)$, la tasa de crecimiento actual, utilizando

$$P'(0) \approx \frac{P(5) - P(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4.$$

Al aplicar la [Ecuación 3.10](#) a $P(t)$, podemos estimar la población dentro de 2 años escribiendo

$$P(2) \approx P(0) + (2)P'(0) \approx 10 + 2(4) = 18;$$

así, dentro de 2 años la población será de 18.000 habitantes.

Punto de control

Se sabe que la población actual de una colonia de mosquitos es de 3,000; es decir, $P(0) = 3000$. Si $P'(0) = 100$, estimar el tamaño de la población en 3 días, donde t se mide en días.

Cambios en los costos e ingresos

Además de analizar el movimiento a lo largo de una línea y el crecimiento de la población, las derivadas se usan para analizar los cambios en los costos, los ingresos y las ganancias. El concepto de función marginal es habitual en el ámbito de la empresa y la economía e implica el uso de derivadas. El costo marginal es la derivada de la función de costos. El ingreso marginal es la derivada de la función de ingresos. La ganancia marginal es la derivada de la función de ganancias, que se basa en la función de costos y la función de ingresos.

DEFINICIÓN

Si los valores de $C(x)$ es el costo de producción de x artículos, entonces el **costo marginal** $MC(x)$ es $MC(x) = C'(x)$.

Si los valores de $R(x)$ son los ingresos obtenidos por la venta de x artículos, entonces el ingreso marginal $MR(x)$ es $MR(x) = R'(x)$.

Si los valores de $P(x) = R(x) - C(x)$ es la ganancia obtenida por la venta de x artículos, entonces la **ganancia marginal** $MP(x)$ se define como $MP(x) = P'(x) = MR(x) - MC(x) = R'(x) - C'(x)$.

Podemos hacer una aproximación

$$MC(x) = C'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}$$

eligiendo un valor adecuado para h . Como x representa objetos, un valor razonable y pequeño para h es 1. Así, sustituyendo $h = 1$, obtenemos la aproximación $MC(x) = C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$. En consecuencia, $C'(x)$ para un valor determinado de x puede considerarse como el cambio en el costo asociado a la producción de un artículo adicional. De manera similar, $MR(x) = R'(x)$ se aproxima a los ingresos obtenidos por la venta de un artículo adicional, y $MP(x) = P'(x)$ se aproxima la ganancia obtenida por la producción y venta de un artículo adicional.

Ejemplo

Aplicación de los ingresos marginales

Supongamos que el número de raciones de barbacoa que se pueden vender, x , puede estar relacionado con el precio aplicado, p , por la ecuación $p(x) = 9 - 0,03x, 0 \leq x \leq 300$.

En este caso, el ingreso en dólares obtenidos por la venta de x raciones de barbacoa viene dado por

$$R(x) = xp(x) = x(9 - 0,03x) = -0,03x^2 + 9x \text{ para } 0 \leq x \leq 300.$$

Utilice la función de ingresos marginales para estimar los ingresos obtenidos por la venta de la ración número 101 de barbacoa. Compárela con el ingreso real obtenido por la venta de esta ración.

Solución

En primer lugar, halle la función de ingresos marginales: $MR(x) = R'(x) = -0,06x + 9$.

A continuación, utilice $R'(100)$ para aproximar a $R(101) - R(100)$, los ingresos obtenidos por la venta de la ración número 101. Dado que $R'(100) = 3$, los ingresos obtenidos por la venta de la ración número 101 son de aproximadamente 3 dólares.

Los ingresos reales obtenidos por la venta de la ración número 101 son

$$R(101) - R(100) = 602,97 - 600 = 2,97, \text{ o } \$2,97.$$

El ingreso marginal es una estimación razonablemente buena en este caso y tiene la ventaja de ser fácil de calcular.

Punto de control

Supongamos que el beneficio obtenido por la venta de x raciones de pescado frito viene dada por $P(x) = -0,03x^2 + 8x - 50$. Utilice la función de ganancia marginal para estimar la ganancia de la venta de la ración número 101 de pescado frito.

Referencia:

OpenStax (s.f.). Las derivadas como tasas de cambio. Recuperado de:

<https://acortar.link/TA6dl0>

