

EJEMPLOS: PARÁBOLA

Ya que entendimos lo que es la parábola, hagamos algunas gráficas de acuerdo con los elementos que nos indiquen.

Ejemplo 1

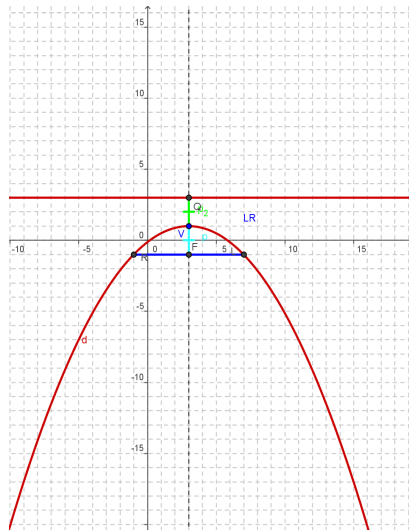
a) El foco está ubicado en $(3, -1)$ y la directriz está ubicada en $y = 3$:

Solución

Los pasos para graficar y obtener los elementos de la parábola son:

- Ubicar la coordenada del foco.
- Trazar una recta horizontal que pase por $y = 3$, que corresponde a la directriz.
- Contamos la distancia que hay entre el foco y la directriz y son 4 unidades; por lo tanto, en la mitad de esta distancia está el vértice cuya coordenada es: $(3, 1)$.
- Como la distancia del vértice al foco es 2 unidades, este corresponde al valor de $p = 2$
- Como el foco está en $(3, -1)$ y el vértice en $(3, 1)$, esto nos indica que la parábola es vertical y abre hacia abajo.
- Medimos a ambos lados del foco el doble de " p " y marcamos los puntos para las coordenadas del lado recto.
- Como es una parábola vertical que abre hacia abajo, la ecuación está dada por: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, recordando que como abre hacia abajo el valor de " p " será negativo.

La gráfica queda así:



Los elementos son:

$$p = -2$$

$$V(3, 1) \rightarrow V(h, k)$$

$$F(3, -1)$$

Directriz en: $y = 3$

Lado recto: $(7, -1)$

$$(-1, -1)$$

Ecuación:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

$$(x - 3)^2 = (4)(-2)(y - 1)$$

$$(x - 3)^2 = -8(y - 1)$$

b) El Vértice está en $(-4, 3)$ abre hacia la derecha y $p = 6$:

Solución

- Ubicamos el vértice en $(-4, 3)$.
- Del vértice hacia la derecha contamos 6 unidades, y este es el foco con coordenadas $(2, 3)$.
- Del vértice a la izquierda medimos 6 unidades y por ahí pasa la directriz, esto es en $x = -10$.
- Del foco hacia arriba y hacia abajo contamos el doble de " p ", esto es 12 unidades para ambos lados y son los extremos del lado recto: $(2, 15)$ y $(2, -9)$.

La gráfica queda:

Los elementos de la parábola son:

$$p = 6$$

$$V(-4, 3) \rightarrow V(h, k)$$

$$F(2, 3)$$

Directriz en: $x = -10$

Lado recto: $(2, 15)$

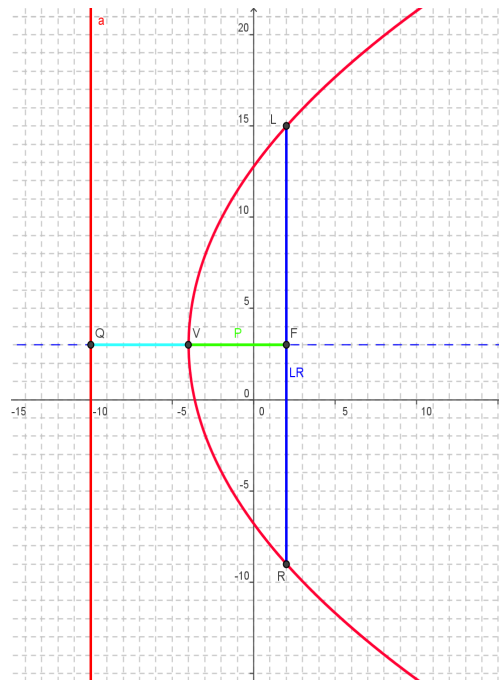
$(2, -9)$

Ecuación:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$(y - 3)^2 = (4)(6)(x + 4)$$

$$(y - 3)^2 = 24(x + 4)$$



c) El vértice está ubicado en $(2, 5)$ y la directriz está en $x = 5$.

Solución

- Ubicamos el vértice en $(2, 5)$.
- Trazamos la directriz, una recta vertical que pasa por $x = 5$.
- La distancia del vértice a la directriz es 3 unidades, por lo que $p = -3$, pues si la directriz queda a la izquierda del vértice quiere decir que abre hacia la izquierda.
- Marcamos un punto a dos unidades de " p " hacia la izquierda para ubicar el foco, la coordenada es: $(-1, 5)$.
- Ubicamos dos puntos, uno hacia arriba y otro hacia abajo del foco a 6 unidades (el doble de " p ") del foco para ubicar los extremos del lado recto, las coordenadas son: $(-1, -1)$ y $(-1, 11)$.

Como abre hacia la izquierda indica que es horizontal, y la ecuación que la define está dada por:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Los elementos de la parábola son:

$$p = -3$$

$$V(2, 5) \rightarrow V(h, k)$$

$$F(-1, 5)$$

Directriz en: $x = 5$

Lado recto: $(-1, -1)$

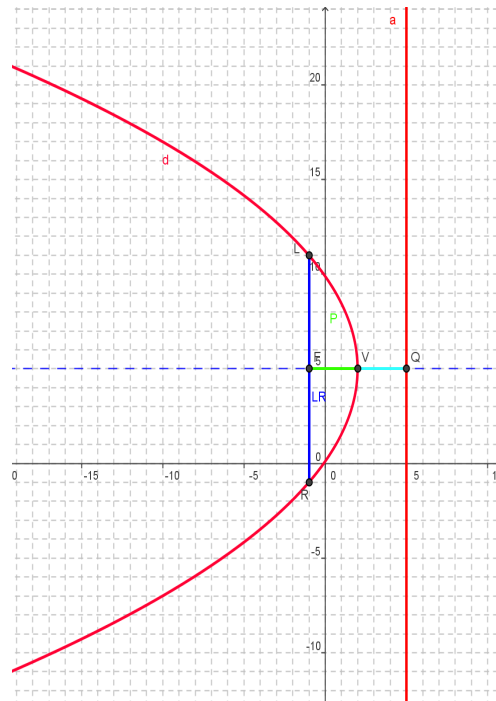
$(-1, 11)$

Ecuación:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$(y - 5)^2 = (4)(-3)(x - 2)$$

$$(y - 5)^2 = -12(x - 2)$$

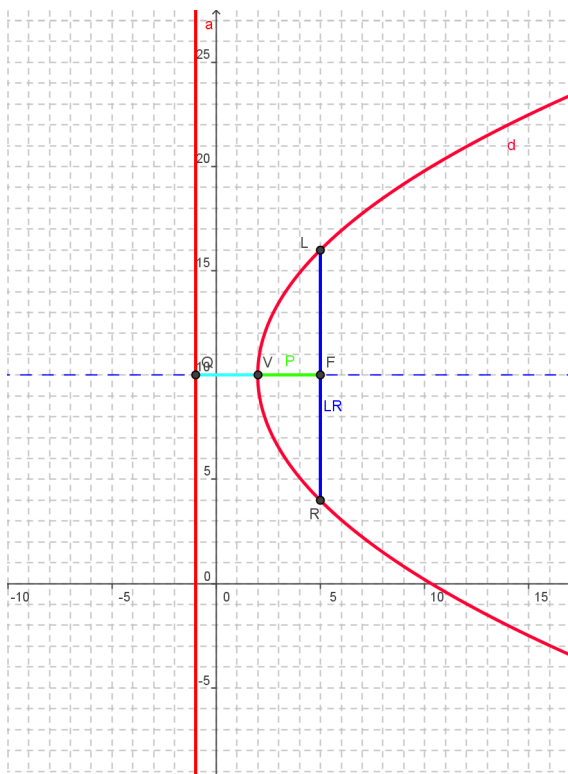


d) Uno de los extremos del lado recto está en $(5, 4)$ y el foco en $(5, 10)$:

Solución

- Ubicamos el foco en $(5, 10)$.
- Ubicamos uno de los extremos del lado recto en $(5, 4)$.
- Medimos la distancia del foco al extremo del lado recto y son 6 unidades.
- Como la distancia del foco a cada uno de los extremos del lado recto es el doble de " p ", significa que $p = 3$.
- Ubicamos el otro extremo del lado recto midiendo 6 unidades arriba del foco en $(5, 16)$.
- Como no nos indica hacia dónde abre la parábola y los lados rectos están arriba y abajo del foco, hay dos opciones: es horizontal y puede abrir a la derecha o a la izquierda.
- Graficamos las dos opciones e identificamos los elementos de la parábola.

SOLUCIÓN 1:



ABRE A LA DERECHA:

$$p = 3$$

$$V(2, 10) \rightarrow V(h, k)$$

$$F(5, 10)$$

Directriz en: $x = -1$

Lado recto: $(5, 4)$

$(5, 16)$

Ecuación:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$(y - 10)^2 = (4(3))(x - 2)$$

$$(y - 10)^2 = 12(x - 2)$$

SOLUCIÓN 2:

ABRE A LA IZQUIERDA:

$$p = -3$$

$$V(8, 10) \rightarrow V(h, k)$$

$$F(5, 10)$$

Directriz en: $x = 11$

Lado recto: $(5, 4)$

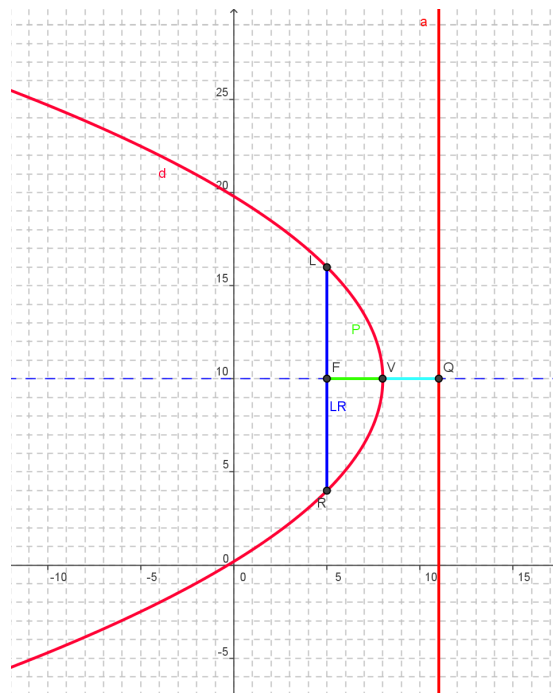
$(5, 16)$

Ecuación:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$(y - 10)^2 = (4)(-3)(x - 2)$$

$$(y - 10)^2 = -12(x - 2)$$



Referencias:

Ramírez, A. J. (2019). Geometría analítica: Enfoques modernos. Editorial Universitaria.

Martínez, P., & Torres, L. (2021). Usos prácticos de la parábola en diseño y tecnología.

Boletín de Matemáticas Contemporáneas, 9(3), 67-79.