EXPLICACIÓN DE LA ECUACIÓN ORDINARIA ESTÁNDAR CON $\mathbf{C(h, k)}$

¿Puedes establecer la ecuación de la circunferencia?, estarás pensando en el último renglón del último cuadro, del cual podemos deducir que la ecuación de la circunferencia con centro en (h,k) está dado por:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Ecuación GENERAL

En matemáticas 1 estudiaste los productos notables, con los cuales aprendiste a desarrollar el binomio al cuadrado. Recordemos un poco este tema, ya que si observas la ecuación que obtuvimos para identificar a una circunferencia que se encuentra con el centro fuera del origen incluye dos binomios al cuadrado: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

NOTA: En los siguientes binomios al cuadrado copia en una hoja de tu cuaderno solo los binomios al cuadrado y trata de resolverlos sin ver las respuestas, evalúa tu trabajo al comparar los resultados con los que se te indican.

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-4)^2=a^2-8a+16$$
$$(5-b)^2=25-10b+b^2$$
$$(x+3)^2=x^2+6x+9$$
$$(m-1)^2=m^2-2m+1$$
$$(8+q)^2=64+16q+q^2$$
$$(y-9)^2=y^2-18y+81$$
$$(f+4)^2=f^2+8f+16$$

Ya que hemos recordado un poco, analicemos la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen, la cual está dada por: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. Si desarrollamos los binomios obtenemos:

$$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=r^2$$

Reacomodando términos e igualando a cero:

$$x^2+y^2-2xh-2yk+h^2+k^2-r^2=0$$

Como h, k y r son números reales, se pueden agrupar como $F=h^2+k^2-r^2$, si a $-2h=D$ y a $-2k=E$, queda:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

A esta ecuación se le conoce como la ecuación de la circunferencia de la forma general.

Ejemplo 1

Obtén la ecuación de la circunferencia de la forma general:

a) $(x-7)^2+(y+3)^2=81$

$$x^2-14x+49+y^2+6y+9-81=0$$
$$x^2+y^2-14x+6y+49+9-81=0$$
$$x^2+y^2-14x+6y-23=0$$

b) $(x+3)^2+(y-2)^2=100$

$$x^2+6x+9+y^2-4y+4-100=0$$
$$x^2+y^2+6x-4y+9+4-100=0$$
$$x^2+y^2+6x-4y-87=0$$

c) $(x+1)^2+(y-3)^2=16$

$$x^2+2x+1+y^2-6y+9-16=0$$
$$x^2+y^2+2x-6y+1+9-16=0$$
$$x^2+y^2+2x-6y-6=0$$

d) $(x-4)^2+(y+2)^2=144$

$$x^2-8x+16+y^2+4y+4-144=0$$
$$x^2+y^2-8x+4y+16+4-144=0$$
$$x^2+y^2-8x+4y-124=0$$

Ejemplo 2

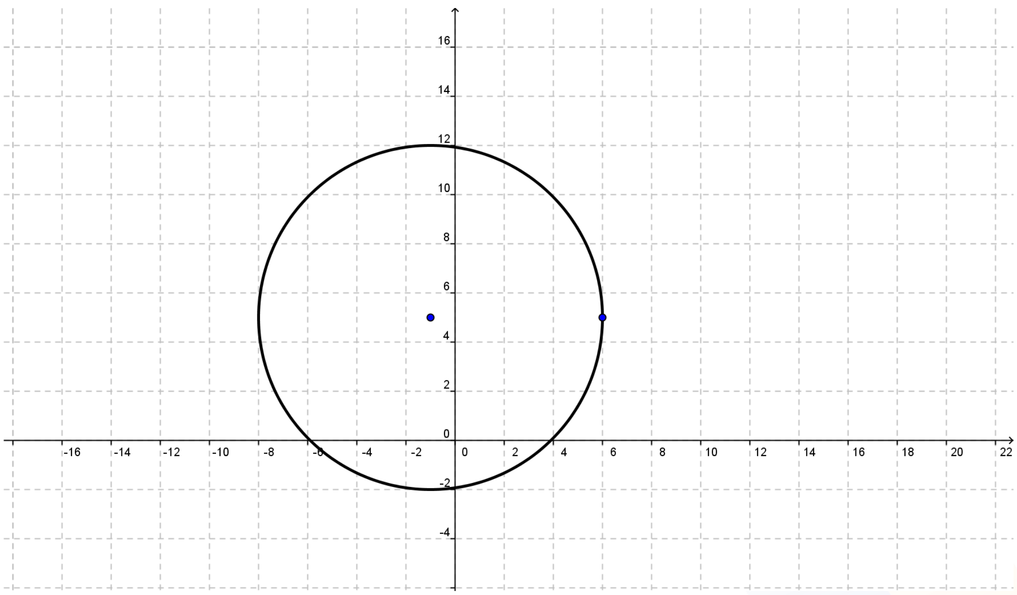
Dada la ecuación de la circunferencia de la forma ordinaria, establece la ecuación de la forma general, identifica el centro y el radio y grafica.

a) $(x+\ 1)^2+(y\ -\ 5)^2=49$

$$x^2+2x+1+y^2-10y+25-49=0$$
$$x^2+y^2+\ 2x-10y+1+25-49=0$$
$$x^2+y^2+2x-10y-23=0$$

$C(-1,5)$ y $r=7$

Gráfica:



a) $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$

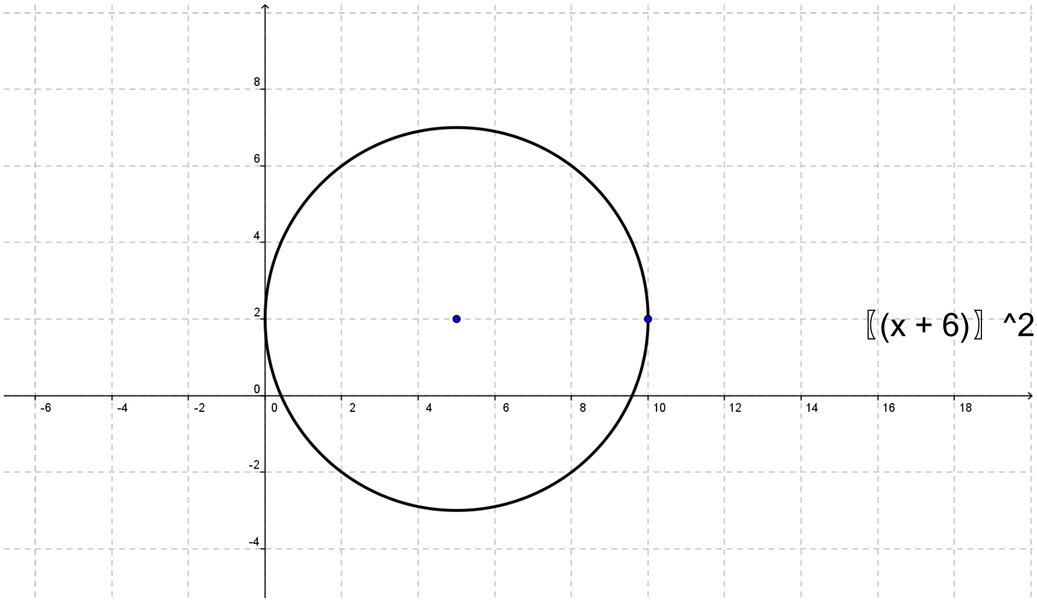
$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 + 4 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$$

$C(5, 2)$ y $r = 5$

Gráfica:



〚(x + 6)〛 ^2+ 〚(y + 8)〛 ^2=4

a) $(x + 6)^2 + (y + 8)^2 = 4$

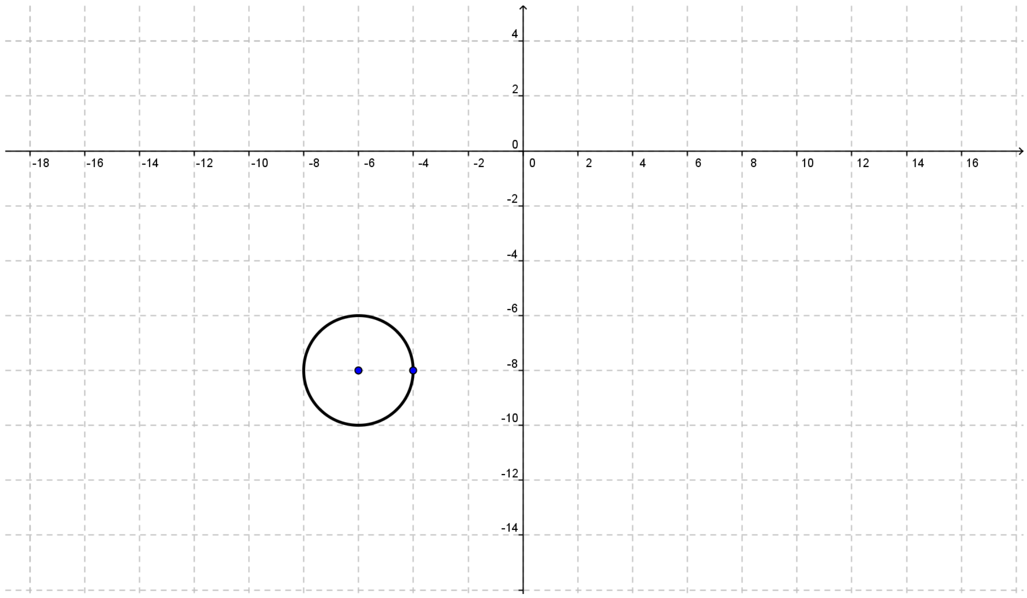
$$x^2 + 12x + 36 + y^2 + 16y + 64 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 12x + 16y + 36 + 64 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 12x + 16y + 98 = 0$$

$C(-6, -8)$ y $r = 2$

Gráfica:



Y cuando no conocemos el centro, el radio, solo la ecuación de forma general ¿qué hacemos?

Algunas veces tenemos la ecuación de la forma general y no conocemos el centro y el radio y nos piden graficarla, para esto la ecuación de la forma general se factoriza y se llega a las siguientes fórmulas, que nos servirán para calcular las coordenadas de centro y la longitud del radio.

$$C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$$

$$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$$

Ejemplo 1

Dada la ecuación de la circunferencia de la forma general, calcula el centro y el radio y gráfica.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 10y - 23 = 0$

De aquí podemos observar que si lo comparamos con:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$D = 2, E = -10$ y $F = -23$

Sustituyendo en las fórmulas:

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

$$C\left(-\frac{2}{2}, -\frac{-10}{2}\right)$$

$$C(-1, 5)$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{(2)^2 + (-10)^2 - 4(-23)}}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{4 + 100 + 92}}{2}$$

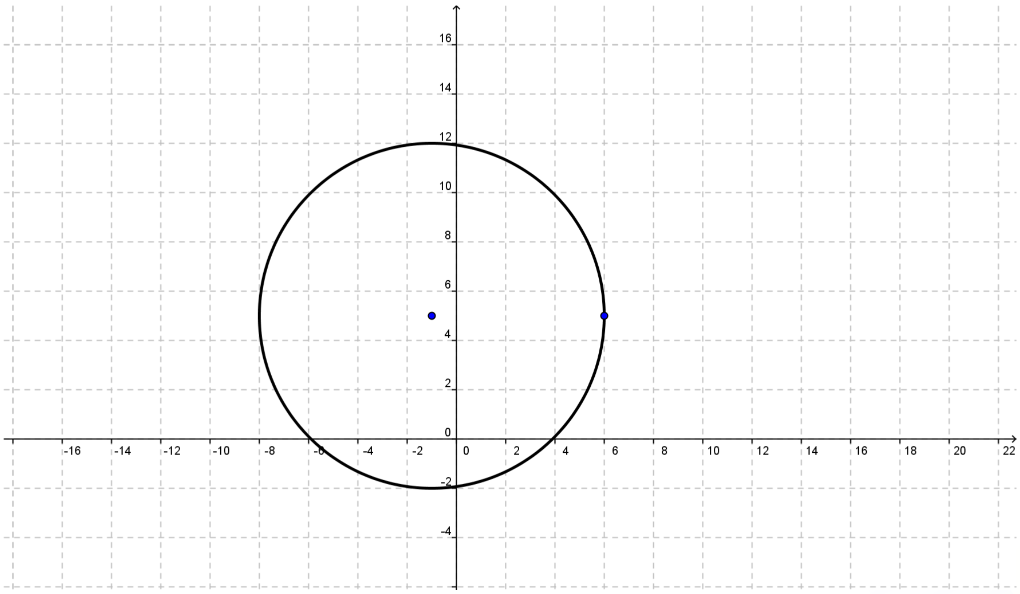
$$r = \frac{\sqrt{196}}{2}$$

$$r = \frac{14}{2}$$

$$r = 7$$

$C(-1, 5)$ y $r = 7$

Gráfica



b) $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$

De aquí podemos observar que si lo comparamos con:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$D = -8, E = 0$ y $F = 15$

Sustituyendo en las fórmulas

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

$$C\left(-\frac{-8}{2}, -\frac{0}{2}\right)$$

$$C(4, 0)$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{(-8)^2 + (0)^2 - 4(15)}}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{64 + 0 - 60}}{2}$$

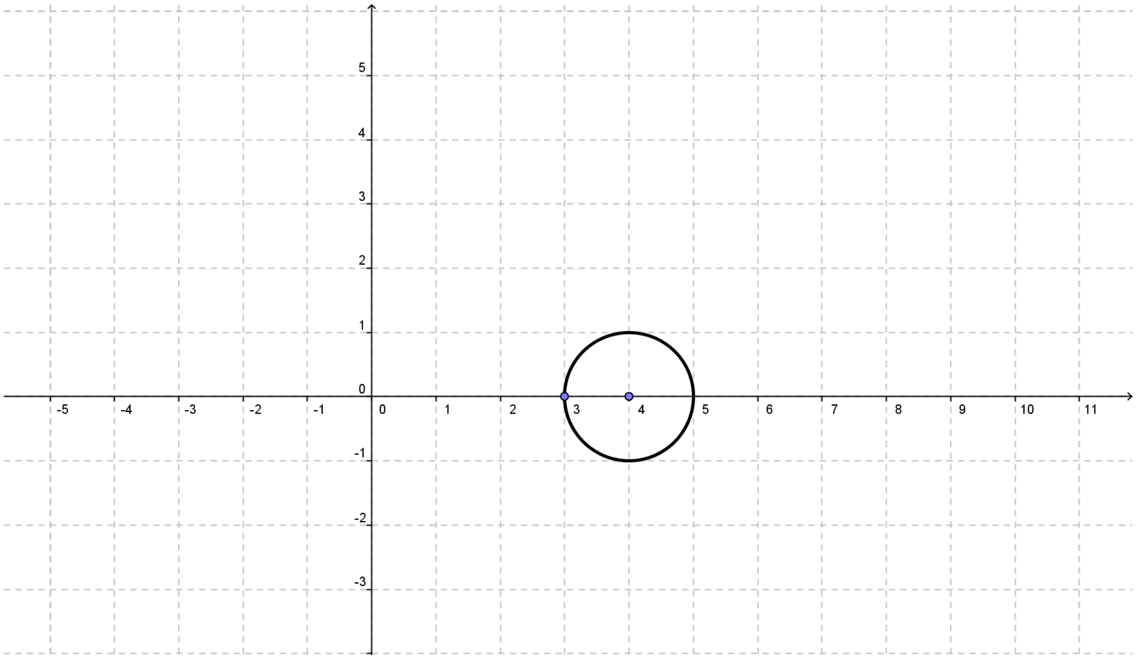
$$r = \frac{\sqrt{4}}{2}$$

$$r = \frac{2}{2}$$

$$r = 1$$

$C(4, 0)$ y $r = 1$

Gráfica:



Referencias:

Gómez, R., & López, S. (2015). La circunferencia en el plano cartesiano. Revista de Matemáticas Aplicadas, 12(3), 45-60.

Ramírez, A. J. (2018). Geometría analítica: Un enfoque práctico. Editorial Universitaria.