PROBLEMAS DE APLICACIÓN

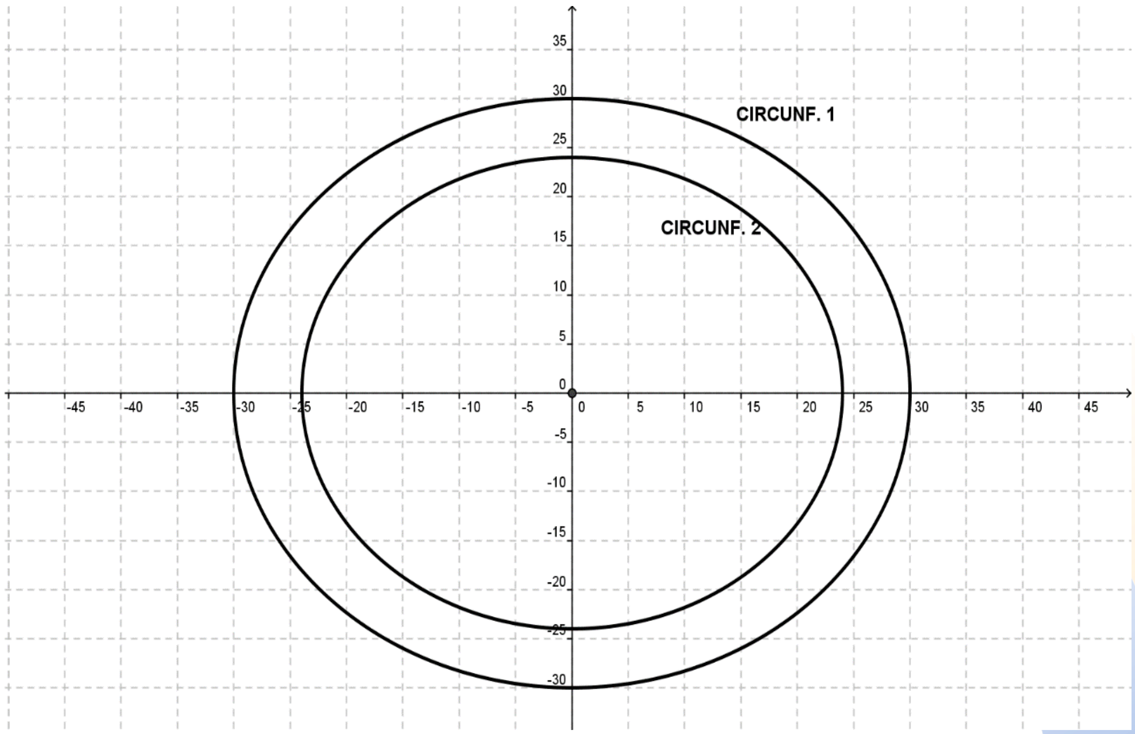
Ahora ya sabes que la circunferencia queda definida por un punto llamado centro, y la distancia de este a cualquiera de los puntos que la define es llamada radio; vamos a analizar algunos ejemplos de aplicación.

Ejemplo 1

Una pista circular está limitada por dos circunferencias concéntricas, y al ubicarlas en un plano cartesiano el centro coincide con el origen, el diámetro de la exterior mide $30\ m$, y el de la interior $24\ m$. ¿Cuál es la ecuación que las define y cuántos metros tiene más la primera que la segunda circunferencia? Grafícalas.

Solución

Como son concéntricas, esto quiere decir que tienen el mismo centro, y quedan ubicadas así:



Puedes hacer la gráfica en el cuaderno usando un compás, o bien usar GeoGebra. Como ambas tienen el centro en el origen, las ecuaciones de las circunferencias están dadas por la fórmula:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

C1:

$$x^2 + y^2 = (30)^2$$
$$x^2 + y^2 = 900$$

C2:

$$x^2 + y^2 = (24)^2$$
$$x^2 + y^2 = 576$$

Los perímetros de ambas para comparar y dar la respuesta a la pregunta:

$$\begin{array}{cc} C_1 = 2\pi r & C_1 = 2\pi r \\ C_1 = 2\pi(30) & C_1 = 2\pi(24) \\ C_1 = 188.49\, m & C_1 = 150.79\, m \end{array}$$

La diferencia entre ambos es $37.69\, m$

<u>Ejemplo 2</u>

Encontrar la ecuación de la circunferencia, de la forma ordinaria y general, cuyo centro es la intersección de las rectas $3x + 2y - 4 = 0$ y $x + 3y + 1 = 0$ y es tangente al eje "x".

Solución

De matemáticas 1 recordarás que cuando tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, el punto donde se cruzan se encuentra resolviendo el sistema, podemos aplicar el método de suma - resta para encontrar este punto, el cual representará el centro de la circunferencia. Una vez conocida la coordenada del centro la ubicamos en el plano y hacemos la circunferencia que sea engente al eje "x" para conocer el radio de la misma, y de esta manera establecer la ecuación que la define.

$$3x + 2y - 4 = 0$$
$$x + 3y + 1 = 0$$

Multiplicando la segunda ecuación por (-3) y sumándola con la primera ecuación obtenemos:

$$x + 3y + 1 = 0(-3)$$
$$\begin{array}{r} -3x - 9y - 3 = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \\ \hline 0 - 7y - 7 = 0 \end{array}$$

Despejando "y":

$$-7y = 7$$

$$y = \frac{7}{-7} = -1$$

Sustituyendo $y = -1$ en la ecuación 2:

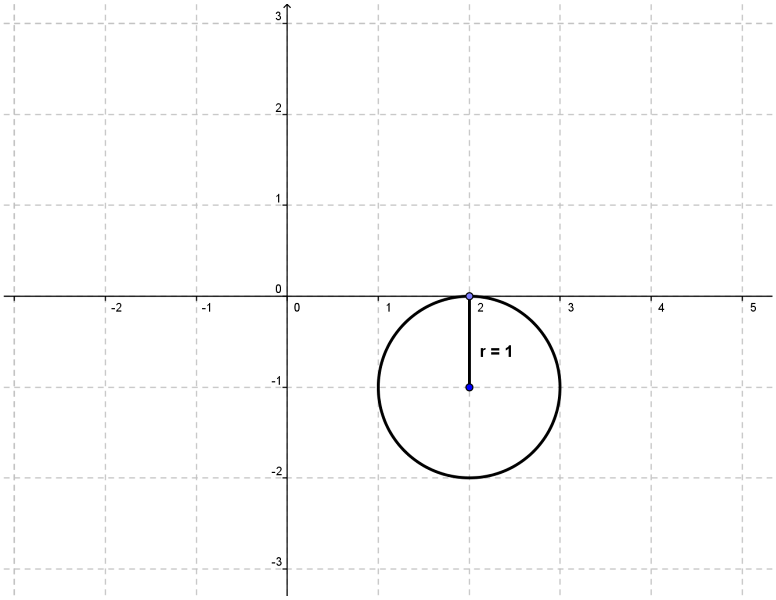
$$x + 3y + 1 = 0$$
$$x + 3(-1) + 1 = 0$$
$$x - 3 + 1 = 0$$

Despejando x:

$$x = 3 - 1$$
$$x = 2$$

Por lo que la coordenada buscada que corresponde al centro es: $C(2, -1)$

Graficando, como es tangente al eje "x", debe cruzar en un punto el eje con la circunferencia, por lo que quedaría ubicada así:



De aquí podemos deducir que el radio es igual a 1

La ecuación de la circunferencia con centro $(2,-1)$ y radio uno estará dada por:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = 1$$

Ecuación de la forma ordinaria: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$

Para la ecuación de la forma general, desarrollamos los binomios y simplificamos:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$$

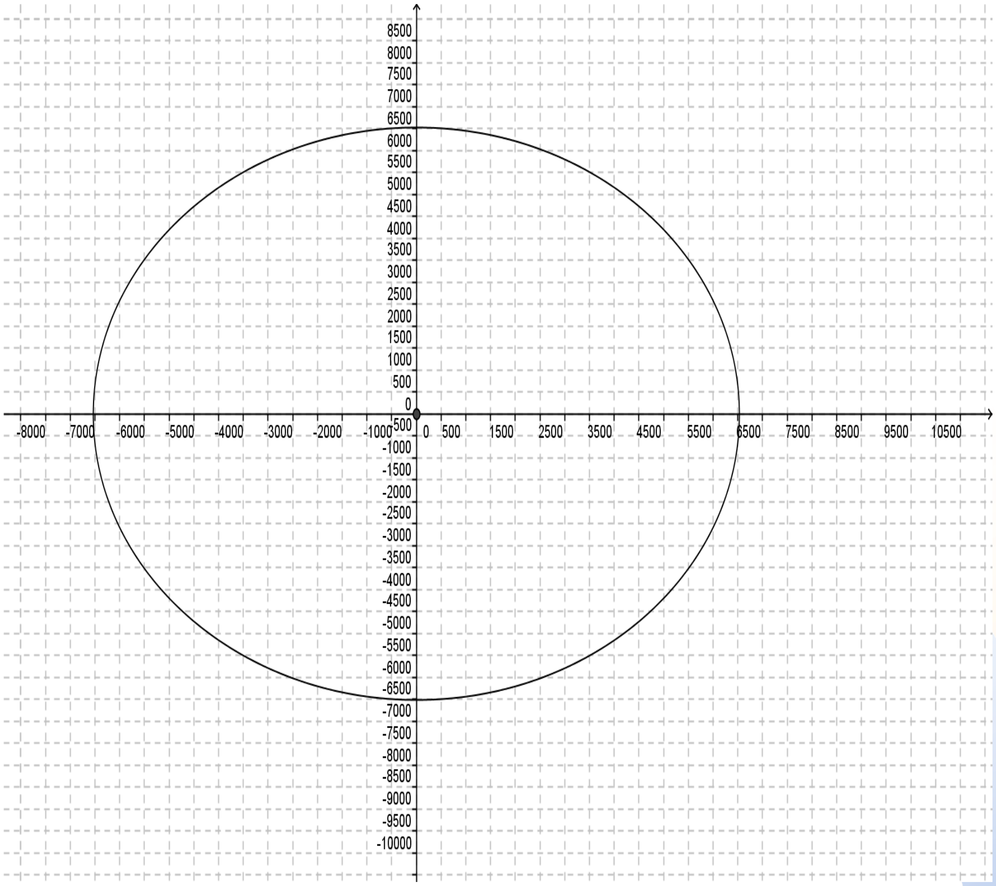
Ejemplo 3

Un satélite fue puesto en órbita a $150\ km$ de su superficie. Si la trayectoria del satélite es circular, y el diámetro de la Tierra es de $12{,}756.8\ km$, ¿cuál es la ecuación que describe el movimiento del satélite?

Solución

Podemos ubicar el centro de la Tierra en el origen; de este a la superficie de la Tierra hay una distancia de $\frac{12{,}756.8}{2}\ km$, que serían $6{,}378.4\ km$ (pues los $12{,}756.8\ km$ corresponden al diámetro, la mitad sería el radio); si le sumamos los $150\ km$ a los que se encuentra el satélite obtenemos una distancia total de $6{,}528.4\ km$. Esta distancia corresponde al radio de la circunferencia que describe el satélite alrededor de la tierra.

Graficando:



Con el centro en $(0, 0)$ y el radio de $6{,}528.4\ km$, la ecuación queda:

$$x^2 + y^2 = (6{,}528.4)^2$$

$$x^2 + y^2 = 42{,}620{,}006.56$$

Referencias:

Gómez, R., & López, S. (2015). La circunferencia en el plano cartesiano. Revista de Matemáticas Aplicadas, 12(3), 45-60.

Ramírez, A. J. (2018). Geometría analítica: Un enfoque práctico. Editorial Universitaria.