

Conjuntos por Extensión y por Comprensión

¿Qué es determinar un conjunto?

Determinar un conjunto es **expresar los elementos que lo conforman**. Tenemos dos maneras de hacerlo: por extensión o por comprensión.

Determinación por extensión

Determinar un conjunto por **extensión o enumeración** consiste en escribir explícitamente los elementos que conforman el conjunto separados por comas y entre llaves.

Ejemplos

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$C = \{-1, 1\}$$

$$D = \{n, d, m, u, o\}$$

$$E = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

Al determinar por enumeración **no importa el orden** en que se escriban los elementos ni si estos se repiten. Por ejemplo, los siguientes tres conjuntos son iguales: $\{a, b, c\}$; $\{c, a, b\}$; $\{a, a, c, b, c\}$.

Una ventaja de este método de determinación es que es fácil comprender y visualizar los elementos del conjunto. La desventaja principal es que esta forma es tediosa para conjuntos grandes e imposible de realizar para conjuntos infinitos. Como en matemáticas la mayoría de conjuntos que se trabajan son infinitos, es habitual que sea más utilizada la segunda forma de determinar conjuntos.

Determinación por comprensión

Determinar un conjunto por **comprensión o descripción** consiste en enunciar la o las propiedades que cumplen los elementos del conjunto.

Para esto, utilizamos una x (u otra letra) para indicar un elemento genérico del conjunto, luego escribimos una barra vertical $|$ (significa "tal que") y luego la o las condiciones que deben cumplir esas x .

Ejemplos

$$A = \{x \mid x \text{ es alguna de las primeras tres letras del alfabeto}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ es un número natural menor o igual a } 10\}$$

$$C = \{x \mid x^2=1, x^2=1\}$$

$$D = \{x \mid x \text{ es una letra de la palabra "mundo"}\}$$

$$E = \{x \mid x \text{ es un número natural impar menor o igual a } 11\}$$

No existe una única forma de denotar un conjunto por comprensión. Pueden expresarse de diferentes formas siempre y cuando no haya ambigüedad.

Por ejemplo, otra forma de expresar al conjunto B es:

$$B = \{x \mid x \text{ es entero y } 1 \leq x \leq 10\}$$

Es común en matemáticas crear nuevos conjuntos a partir de algunos elementos de otro conjunto. Así, si queremos formar un conjunto E a partir de los elementos de otro conjunto U, se expresa que B es en conjunto cuyos elementos pertenecen a U ($x \in U$) tales que cumplen una determinada condición. El conjunto U es llamado **conjunto universal** o universo de discurso y es aquel que contiene todos los elementos relevantes de un contexto dado.

Por ejemplo, si queremos denotar que E sea el conjunto de todos los números naturales pares, podemos escribirlo de alguna de las siguientes formas:

$$E = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ es par}\}$$

$$E = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ y } x \text{ es par}\}$$

$$E = \{x \in \mathbf{N} \mid x=2k \text{ y } k \in \mathbf{N}\}$$

La ventaja principal del método de determinación por comprensión es que **permite describir conjuntos grandes o infinitos de manera compacta**. Por ejemplo, el conjunto de todos los números positivos es imposible de expresar por extensión, porque son infinitos elementos, en cambio, por comprensión se puede expresar fácilmente como $P = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ que se lee como "P está formado por los números reales x tales que x es mayor que cero (es positivo)".

Otro ejemplo es el conjunto **Q** de los números racionales, el cual se denota por comprensión como:

$$\mathbf{Q} = \{a/b \mid a \text{ y } b \text{ son números enteros y } b \neq 0\}$$

Un conjunto determinado por extensión y otro por comprensión pueden ser equivalentes. En la siguiente tabla se muestra la comparación entre las dos formas de expresar a un mismo conjunto.

| Conjunto dado por extensión | Conjunto dado por comprensión |
|---------------------------------|--|
| {a, b, c} | {x x es alguna de las primeras tres letras del alfabeto} |
| {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} | {x x es un número natural menor o igual a 10} |
| {-1, 1} | {x $x^2=1$ } |
| {n, d, m, u, o} | {x x es una letra de la palabra "mundo"} |
| {1, 3, 5, 7, 9, 11} | {x x es un número natural impar menor o igual a 11} |

Referencia:

Machado, D. (2024). Determinación de Conjuntos por Extensión y Comprensión. Flamath; Daniel Machado. Recuperado de: <https://flamath.com/determinar-conjuntos>

