Conjunto Vacío y Universal

Estos conjuntos son importantes en la medida que establecen el contexto en el que se trabaja en determinada teoría o problema.

Por ejemplo, si planteamos la ecuación: $3x + 2 = 0$ y nos preguntamos por su solución en el conjunto de los números enteros, encontraremos que no existe entero alguno tal que cumpla la igualdad. Es decir, el conjunto de enteros que satisface la ecuación es vacío.

En cambio si planteamos la misma ecuación: $3x + 2 = 0$ y nos preguntamos por su solución en el conjunto de los números racionales, será fácil ver que sí existe un racional que cumple con la igualdad. Es decir, el conjunto de racionales que satisfacen la ecuación no es vacío.

En los casos anteriores, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ respectivamente fueron establecidos como conjuntos universo para tales problemas.

Así, diremos que: el CONJUNTO UNIVERSAL establece el contexto de trabajo. Es decir, es el conjunto en el que se enmarca una determinada teoría o problema.

Por otra parte el CONJUNTO VACÍO está intimamente ligado al conjunto universal y es aquel que no tiene ningún elemento de tal universo.

Denotaremos:

Con la notación anterior, podemos expresar los casos anteriores de la siguiente manera:

$$\{x \in \mathbb{Z} | 3x + 2 = 0\} = \emptyset \quad \{x \in \mathbb{Q} | 3x + 2 = 0\} \neq \emptyset$$

Ejemplos:

$\emptyset$ *Conjunto vacío*

Ω *Conjunto Universal*

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5x^2 - 1 = 0\} = \emptyset.$	$\Omega = \mathbb{N}$
$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 1\} = \emptyset.$	$\Omega = \mathbb{Z}$
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 < 0\} = \emptyset.$	$\Omega = \mathbb{R}$
$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid 5x + 3 = 0\} = \left\{-\frac{3}{5}\right\}.$	$\Omega = \mathbb{Q}$
$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^3 - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 1\}.$	$\Omega = \mathbb{Z}$
$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\} = \emptyset.$	$\Omega = \mathbb{R}$
$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x + 2 = 0\} = \{-2, -1\}.$	$\Omega = \mathbb{R}$
$H = \{x \in \mathbb{Q} \mid 3x \in \mathbb{Z}\} = \left\{x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x = \frac{p}{3} \text{ con } p \in \mathbb{Z}\right\}.$	$\Omega = \mathbb{Q}$
$K = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset.$	$\Omega = \mathbb{R}$

En cada uno de los ejemplos anteriores, se establece cuál es el conjunto que se toma como universal, desde el momento en que se especifica de qué conjunto se toman los elementos. A la derecha en cada caso, se hacen explícitos.

En general es fácil descubrir las igualdades o desigualdades en cada conjunto. Sin embargo, te dejamos el reto de contestar la siguiente pregunta:

$$\text{¿}\textit{Puedes explicar porqué}: \; C = \emptyset, F = \emptyset \text{ y } K = \emptyset \,?$$

Observación
Lo importante es darse cuenta de que los conceptos de Conjunto universal y Conjunto vacío, son relativos. El conjunto universal establece el contexto y el vacío depende de ello.

Referencia:
Villamar, H. A. (s/f). Conjuntos. Unam.mx. Recuperado de:
http://newton.matem.unam.mx/calculo1/Conjuntos/c_conjuntos02_d.html