SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON 3 VARIABLES

Jordi recibió una herencia de 12,000 dólares que dividió en tres partes e invirtió de tres maneras: en un fondo del mercado monetario que paga un 3% de interés anual; en bonos municipales que pagan un 4% de interés anual; y en fondos de inversión que pagan un 7% de interés anual. Jordi invirtió 4,000 dólares más en fondos municipales que en bonos municipales. Ganó 670 dólares en intereses el primer año. ¿Cuánto invirtió Jordi en cada tipo de fondo?

Comprender el enfoque correcto para plantear problemas como este hace que hallar una solución sea cuestión de seguir un patrón. En esta sección resolveremos este y otros problemas similares que implican tres ecuaciones y tres variables. Para ello se utilizan técnicas parecidas a las que se emplean para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos variables. Sin embargo, dar con las soluciones a los sistemas de tres ecuaciones exige un poco más de organización y un toque de visualización.

Resolución de sistemas de tres ecuaciones de tres variables

Para resolver sistemas de ecuaciones de tres variables, conocidos como sistemas de tres en tres, la principal herramienta que utilizaremos se llama eliminación de Gauss-Jordan, que recibe su nombre del prolífico matemático alemán Karl Friedrich Gauss. Aunque no existe ningún orden definitivo para realizar las operaciones, sí hay directrices específicas sobre el tipo de movimientos que se pueden realizar. Podemos numerar las ecuaciones para llevar la cuenta de los pasos que aplicamos. La meta es eliminar una variable a la vez para lograr la forma triangular superior, la forma ideal para un sistema de tres por tres porque permite volver a sustituir de forma directa para hallar una solución (x,y,z), lo cual llamamos un triple ordenado. Un sistema en forma de triángulo superior tiene el siguiente aspecto:

$$Ax+By+Cc=DEy+Fc=GHc=K$$

La tercera ecuación se puede resolver para c, y luego volvemos a sustituir para hallar y y x. Para escribir el sistema en forma triangular superior, podemos realizar las siguientes operaciones:

1. Intercambia el orden de dos ecuaciones cualesquiera.
2. Multiplica ambos lados de una ecuación por una constante distinta de cero.
3. Suma un múltiplo distinto de cero de una ecuación a otra ecuación.

El conjunto de soluciones de un sistema de tres por tres es un triple ordenado $\{(x,y,z)\}$.Gráficamente, el triple ordenado define el punto que es la intersección de tres planos en el espacio. Puedes visualizar dicha intersección imaginando cualquier esquina de una habitación rectangular. Una esquina está definida por tres planos: dos paredes contiguas y el piso (o el techo). Cualquier punto de encuentro entre dos paredes y el piso representa la intersección de tres planos.

Número de soluciones posibles

La Figura 2 y la Figura 3 ilustran posibles escenarios de solución para sistemas de tres por tres.

- Los sistemas que tienen una única solución son aquellos que, tras la eliminación, dan como resultado un conjunto de soluciones formado por un triple ordenado $\{(x,y,z)\}$.Gráficamente, el triple ordenado define un punto que es la intersección de tres planos en el espacio.
- Los sistemas que tienen un número infinito de soluciones son aquellos que, tras su eliminación, dan como resultado una expresión que siempre es verdadera, como por ejemplo 0=0. Gráficamente, un número infinito de soluciones representa una línea o plano coincidente que sirve de intersección de tres planos en el espacio.
- Los sistemas que no tienen solución son aquellos que, tras su eliminación, dan como resultado un enunciado que es una contradicción, como por

ejemplo 3=0. Gráficamente, un sistema sin solución se representa mediante tres planos sin ningún punto en común.

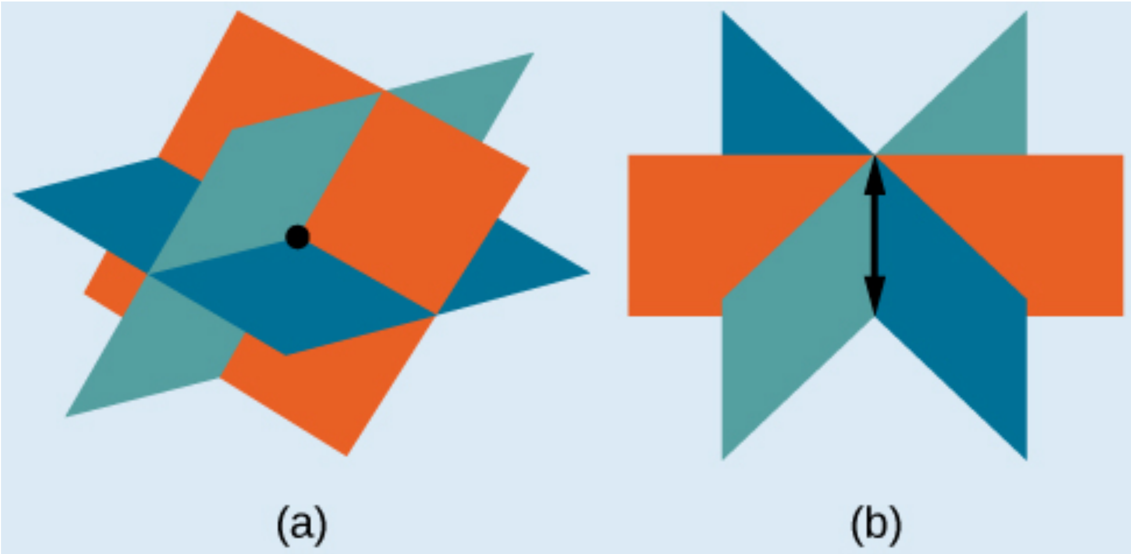

Figura 2 (a) Tres planos se intersecan en un único punto, y representan un sistema de tres por tres con una única solución. (b) Tres planos se intersecan en una línea, y representan un sistema de tres por tres con infinitas soluciones.

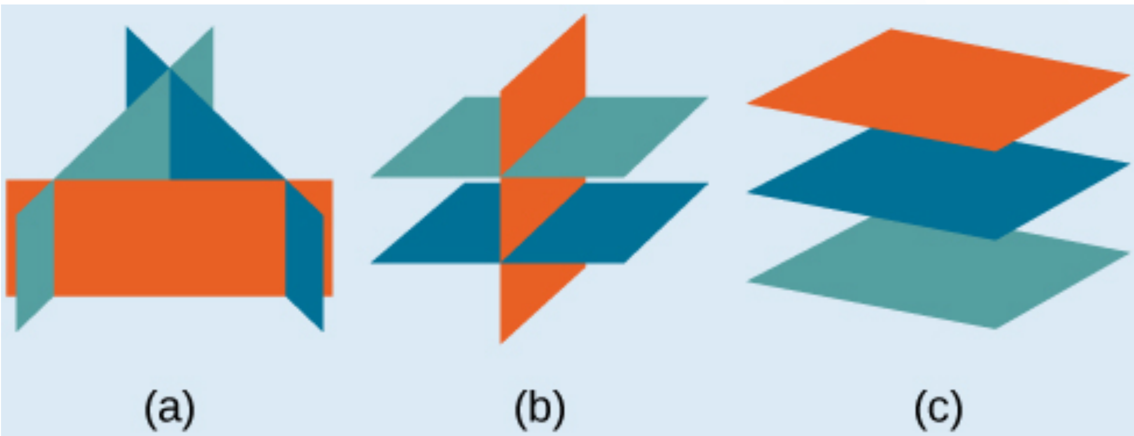

Figura 3 Las tres figuras representan sistemas de tres por tres sin solución. (a) Los tres planos se intersectan entre sí, pero no en un punto común. (b) Dos de los planos son paralelos y se intersectan con el tercer plano, pero no entre sí. (c) Los tres planos son paralelos, por lo que no hay punto de intersección.

Referencia:

Abramson, J. (2022) Sistemas de ecuaciones lineales: tres variables. Openstax. Recuperado de: https://openstax.org/books/precálculo-2ed/pages/9-2-sistemas-de-ecuaciones-lineales-tres-variables