SOLUCIÓN POR EL MÉTODO GRÁFICO

Como es de esperar, el método gráfico consiste en representar las gráficas asociadas a las ecuaciones del sistema para deducir su solución. La solución del sistema es el punto de intersección entre las gráficas. La razón de ello es que las coordenadas de dicho punto cumplen ambas ecuaciones y, por tanto, es la solución del sistema.

Como vamos a trabajar con sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (x e y), la gráfica de cada ecuación es una recta. Como consecuencia, la intersección de las gráficas es un único punto (a,b) y la solución del sistema es x=a e y=b. Sin embargo, veremos dos ejemplos de casos especiales: un sistema sin solución (rectas paralelas) y un sistema con infinitas soluciones (rectas iguales).

Obviamente, para poder aplicar el método gráfico debemos saber representar las gráficas de las rectas. Nosotros lo haremos uniendo puntos calculados dando valores en la ecuación.

El método gráfico también podemos usarlo para resolver sistemas con ecuaciones de distinto tipo (por ejemplo, una recta y una parábola; o dos inecuaciones, como veremos en el último sistema).

Recordamos que la solución de un sistema de ecuaciones son los valores de las incógnitas x e y que hacen que se verifiquen todas las ecuaciones del sistema.

Sistemas resueltos

Sistema 1 Fácil

Resolver gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ y + x = 3 \end{cases}$$

Solución

Lo primero que hacemos es depejar la $\boldsymbol{y}$ en ambas ecuaciones para que sea más fácil calcular los puntos.

Primera ecuación:

$$y - 2x = 0 \rightarrow$$
$$y = 2x$$

Segunda ecuación:

$$y + x = 3 \rightarrow$$
$$Y = 3 - x$$

Ahora vamos a calcular unos cuantos puntos de las dos funciones para representarlas (con 2 es suficiente). Utilizaremos x = 0 y x = 2

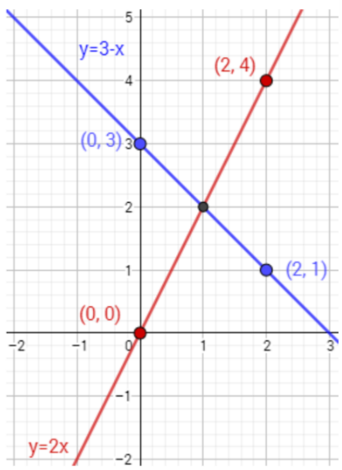
Para la primera función tenemos la tabla

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = 2x}$	**Punto**
0	0	(0,0)
2	4	(2,4)

Para la segunda función tenemos la tabla

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = 3 - x}$	**Punto**
0	3	(0,3)
2	1	(2,1)

Ahora representamos los puntos de cada tabla y los unimos para obtener las rectas:



La solución del sistema es el punto donde las gráficas se cortan (intersección de la recta), es decir:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Sistema 2 Fácil

Resolver gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x \; + y \; = 4 \rightarrow \\ 3x \; + \dfrac{1}{2}y \; = \; 2 \end{cases}$$

Solución

Despejar y en ambas ecuaciones.

Primera ecuación:

$$4x \; + y = 4 \rightarrow$$

$$y \; = \; 4 \; - \; 4x$$

Segunda ecuación:

$$3x\frac{1}{2}y = 2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}y \; = \; 2 - 3x \; \rightarrow$$

$$y = 2(2 - 3x) \rightarrow$$

$$y = 4 - 6x$$

Ahora damos valores a X para obtener algunos puntos de cada recta.

Utilizaremos X = 1 y X = -1

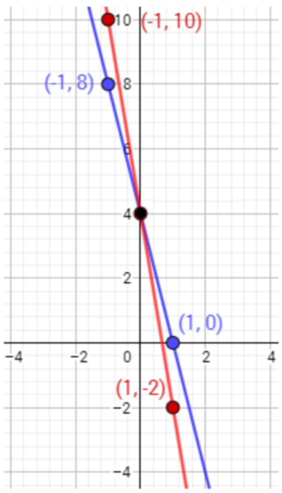
Para la primera función tenemos la tabla

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y \; = \; 4 \; - \; 6x}$	**Punto**
1	-2	(1,-2)
-1	10	(-1,10)

Para la segunda función tenemos la tabla

x	$y = 4 - 6x$	Punto
1	-2	(1,-2)
-1	10	(-1,10)

Representamos los puntos de cada tabla y los unimos



La solución del sistema es el punto de intersección, es decir,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

Sistema 3 Fácil

Resolver gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 33 \\ 12x - 7y = 51 \end{cases}$$

Solución

En este problema vamos a dar valores a la x y a la y directamente (sin dejar de despejar la y). Los puntos que escogemos son los puntos de corte con los ejes (es decir, x = 0 e y = 0).

En la primera ecuación, Si x = 0, entonces

$$3 \cdot 0 + 5y = 33 \rightarrow$$

$$3x = 33 \rightarrow$$

$$x = \frac{33}{3} = 11$$

Por tanto, para la primera recta tenemos

x	y	Punto
0	6.6	(0,6.6)
11	0	(11,0)

Repetimos el proceso con la segunda ecuación

Si x= 0, entonces

$$12 \cdot 0 - 7y = 51 \quad \rightarrow$$

$$-7y = 51 \quad \rightarrow$$

$$y = -\frac{51}{7} \cong -7.29$$

Y si y= 0, entonces

$$12x - 7 \cdot 0 = 51 \quad \rightarrow$$

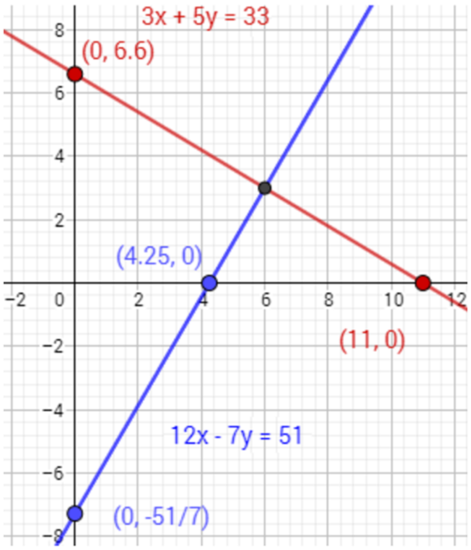
$$12x = 51 \rightarrow$$

$$x = \frac{51}{12} = 4.25$$

Por tanto, para la segunda recta tenemos

x	y	Punto
0	$-\frac{51}{7}$	$\left(0,-\frac{51}{7}\right)$
4.25	0	(4.25 , 0)

Representamos los 4 puntos y los unimos:



La solución del sistema es el punto de intersección de las gráficas de las rectas, esto es,

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

Sistema 4 Difícil

Resolver gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{y = 2x + 2}{y = 2x + 1}$$

Solución

Como tenemos la y despejada en ambas ecuaciones, damos valores a x.

Utilizamos $x = 1$ y $x = -1$.

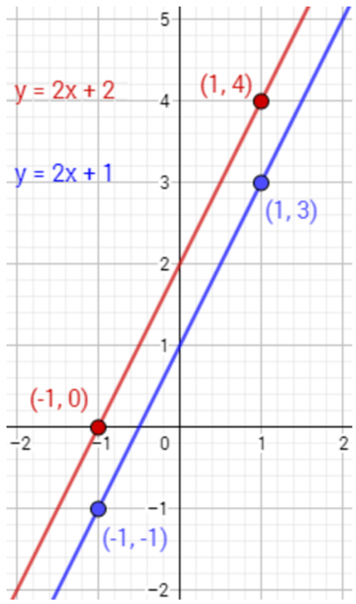
Para la primra función tenemos la tabla

x	$y = 2x + 2$	Punto
1	4	(1,4)
-1	0	(-1,-1)

Para la segunda función tenemos la tabla

x	$y = 2x + 1$	Punto
1	3	(1,3)
-1	-1	(-1,-1)

Ahora representamos los puntos de cada tabla y los unimos



La solución del sistema es el punto donde las gráficas se cortan, pero las rectas de este problema no se cortan por que son paralelas (tienen la misma pendiente m = 2). Por tanto, el sistema no tiene solución.

Sistema 5 Fácil

Resolver gráficamente el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 6y - 4x = 8 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$$

Solución

Lo primero que hacemos es despejar la y en ambas ecuaciones.

Primera ecuación

$$6y - 4x = 8 \;\rightarrow$$

$$6y = 8 + 4x \;\rightarrow$$

$$y = \frac{8 + 4x}{6}$$

Segunda ecuación

$$2x + y = 12 \;\rightarrow$$

$$y = 12 - 2x$$

Ahora vamos a calcular unos cuantos puntos de las dos funciones para representarlas. Para la primera, utilizaremos x = -2 y x =10 y para la segunda, x = 2 y x = 6.

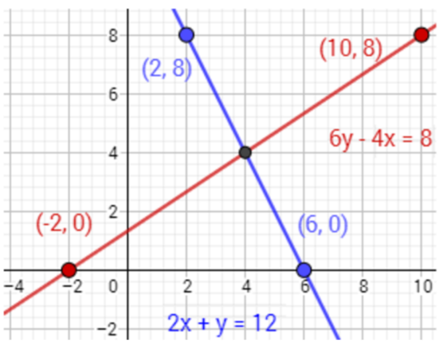
La primera tabla que tenemos es

x	$y = \frac{8+4x}{6}$	**Punto**
-2	0	(-2,0)
10	8	(10,8)

La segunda tabla es

x	$y = 12 - 2x$	Punto
2	8	(2,8)
6	0	(6,0)

Representamos y unimos los puntos de las rectas:



Sistema 6 Difícil

Resolver gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3y - 5x = 3 \\ 9y - 9 = 15x \end{cases}$$

Solución

En este problema vamos a dar valores a x y a y sin despejar la y. Calcularemos los puntos de corte con los ejes dando los valores $x = 0$ e $y = 0$

En la primera ecuación, si x = 0, entonces

$$3y - 5 \cdot 0 = 3 \rightarrow$$
$$3\, y = 3 \rightarrow$$
$$y = 1$$

Y si $= y\ 0$, entonces

$$3 \cdot 0 - 5 \cdot x = 3 \rightarrow$$
$$-5\, x = 3 \rightarrow$$
$$3\, x - \frac{3}{5} = -\, 0.6$$

En la segunda ecuación, si $x = 0$, entonces

$$9y - 9 = 15 \cdot 0 \rightarrow$$

$$-9 = 15x \rightarrow$$

$$x = -\frac{9}{15} = -0.6$$

Para la primera función tenemos la tabla

x	y	**Punto**
0	1	(0,1)
-0.6	0	(-6.0,0)

Para la segunda función tenemos la tabla

x	y	**Punto**
0	1	(0,1)
-0.6	0	(-6.0,0)

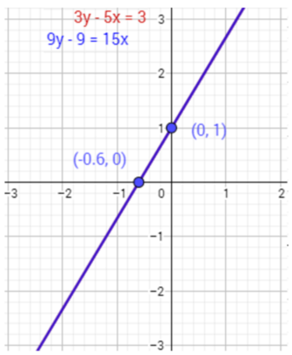
Los dos puntos obtenidos para cada función son iguales. Esto significa que las rectas se cortan en dos puntos y, por tanto, las ecuaciones representan la misma recta.

Recuerda que la intersección entre dos rectas puede ser:

- Un único punto,
- Ningún punto (las rectas son paralelas) o
- Infinitos puntos (se trata de la misma recta).

En este problema estamos en el tercer caso. Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.

La gráfica de las rectas del sistema es



Nota 1: los puntos que son solución del sistema son los (x, y) tales que 3y − 5x = 3

Nota 2: si hubiéramos multiplicado toda la primera ecuación por 3 (operación que no cambia su gráfica) habríamos obtenido exactamente la segunda ecuación. Por esto mismo, las rectas son coincidentes: son ecuaciones equivalentes.

Sistema 7 Muy difícil

Resolver gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones:

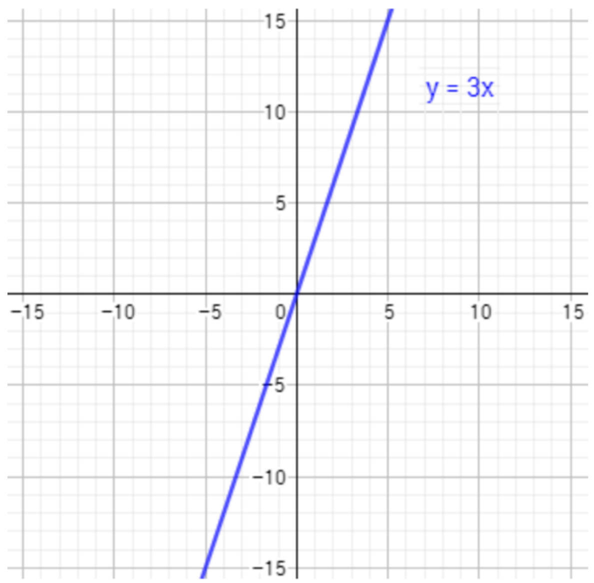
$$\begin{cases} y \geq 3x \\ y \leq 2 - 3x \end{cases}$$

Solución

En este problema tenemos dos desigualdades.

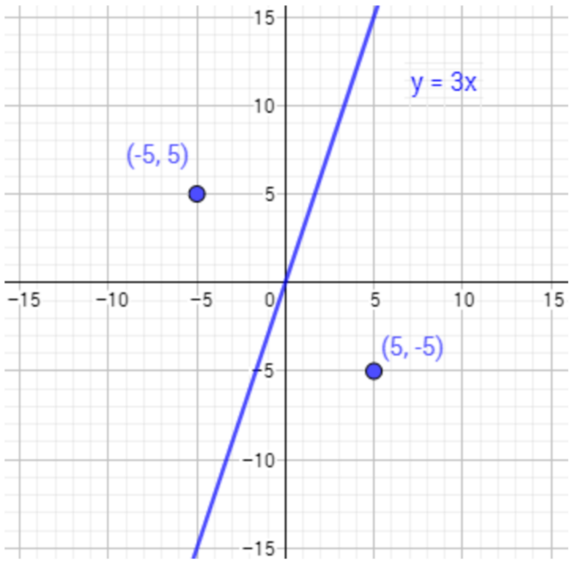
Cada una de las desigualdades representa una región del plano. La solución del sistema es la intersección de ambas regiones. Por tanto, lo que haremos es representar las dos regiones por separado para observar la región en la que se cortan.

Para representar la región $y \geq 3x$, representamos primero la recta $y = 3x$. Podemos hacerlo dando puntos. La gráfica de la recta es

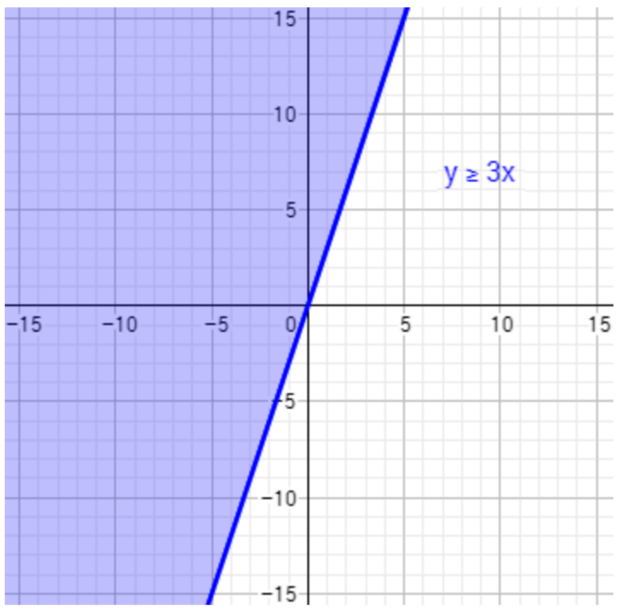


La recta divide el plano en dos regiones e $y \geq 3x$ es una de ellas. Para saber cuál, tomamos un punto de cada una y comprobamos cuál de los dos cumple la desigualdad $y \geq 3x$

Tomamos los puntos (-5,5) (lado izquierdo) y (5,-5) (lado derecho):



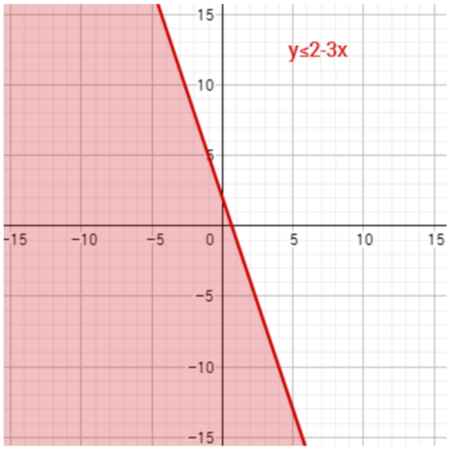
El punto que cumple la desigualdad $y \geq 3x$ es el primero ya que



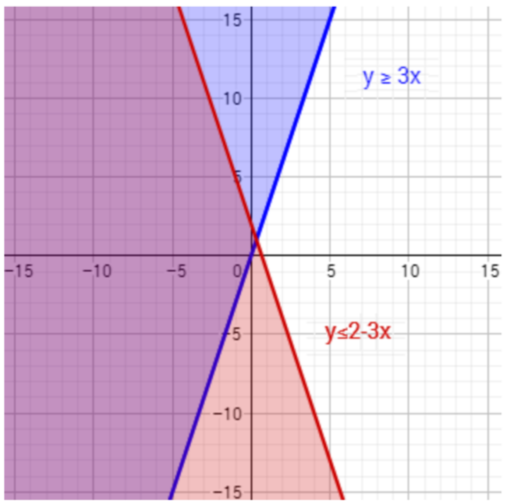
$$y = 5 \geq -15 = 3x$$

Por tanto, la región $y \geq 3x$ es la del lado izquierdo (color azul)

Repetimos el proceso con la región $y \leq 2 - 3x$ (región roja)



Ahora representamos ambas regiones y su intersección (color más oscuro) es la solución del sistema:



La solución del sistema de inecuaciones (o desigualdades) es una región del plano y, por tanto, existen infinitos puntos que cumplen ambas inecuaciones.

Referencia:

matesfacil.com (s.f.) Sistemas de ecuaciones: Método gráfico. Recuperado de:
https://www.matesfacil.com/ESO/sistema-ecuaciones/metodo-grafico/metodo-grafico-sistemas-ecuaciones-lineales-resueltos-grafica-recta-interseccion-solucion-interseccion.html