

Triángulos Rectángulos y Oblicuángulos

Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conoce un lado y un ángulo:

Para dar solución; es decir, encontrar los valores restantes, hay que saber cuáles son las cantidades que se tienen. De antemano sabemos que al ser un triángulo rectángulo, uno de los ángulos es de 90° y el otro es la cantidad que se entrega. Por ello, para calcular el 3er ángulo, sumamos el valor del ángulo conocido más los 90° y el resultado se lo restamos a 180° .

Una vez que se tienen los tres ángulos, se utilizan las funciones trigonométricas (sen, cos o tan) para calcular el valor de cada lado faltante. Por ejemplo:

- ✓ Si conocemos un cateto, para calcular el siguiente cateto se puede utilizar la tangente ($\tan(\theta)$), ya que esta involucra la razón entre los catetos y el ángulo entre ellos, y la función seno($\sin(\theta)$) o coseno($\cos(\theta)$) para calcular la hipotenusa.
- ✓ Si conocemos la hipotenusa, podemos utilizar las funciones $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ para calcular los valores de los catetos.

Ejemplo: Resolver el triángulo rectángulo con $h=14.6$ y $\theta = 33.2^\circ$.

Triángulos Rectángulos y Oblicuángulos

Solución:

1. Buscamos el valor para el ángulo faltante.

$$\theta = 33.2$$

$$\gamma = 90$$

$$\alpha = ?$$

$$180 - (90 + 33.2) = 56.8^\circ$$

2. Para calcular el cateto opuesto utilizamos $\sin(\theta)$.

$$\sin \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{CO}{14.6}$$

- 2.1. Se despeja la expresión para obtener el valor del CO.

$$\begin{aligned}\sin(33.2) &= \frac{CO}{14.6} \\ (14.6) \sin(33.2) &= CO\end{aligned}$$

- 2.2. Se resuelve para CO.

$$(14.6)(0.5476) = 7.99 = CO$$

3. Para calcular el cateto adyacente utilizamos $\cos(\theta)$.

$$\cos \theta = \frac{CA}{\text{hipotenusa}} = \frac{CA}{14.6}$$

- 3.1. Despejamos y resolvemos igual que para \sin .

$$\begin{aligned}\cos(33.2) &= \frac{CA}{14.6} \\ (14.6)(0.8368) &= 12.2 = CA\end{aligned}$$

Triángulos Rectángulos y Oblicuángulos

Resolución de triángulos rectángulos cuando se conocen dos lados:

Nuevamente aquí tenemos que identificar lo que se tiene para poder calcular los ángulos y el lado faltantes.

Ejemplo: resolver el triángulo que tiene los siguientes valores para un cateto y la hipotenusa.

$$a = 42.8 \text{ y } h = 103$$

Solución:

1. Calcular el ángulo faltante, para ello podemos usar $\sin \theta$.

$$\sin \theta = \frac{CO}{hipotenusa} = \frac{42.8}{103} = 0.41553398$$

$$\theta = \sin^{-1} 0.41553398 = 24.55^\circ$$

2. Ahora podemos calcular el 3er ángulo.

$$180 - (90 + 24.55) = 65.5^\circ$$

3. El cateto faltante lo podemos calcular con el teorema de Pitágoras o con una función trigonométrica, para este ejemplo usaremos $\cos \theta$.

$$\cos(24.55) = \frac{CA}{hipotenusa} = \frac{CA}{103}$$

- 3.1. Despejamos para obtener el cateto adyacente.

$$(103)(\cos(24.55)) = CA = (103)(0.9096) = 93.69$$

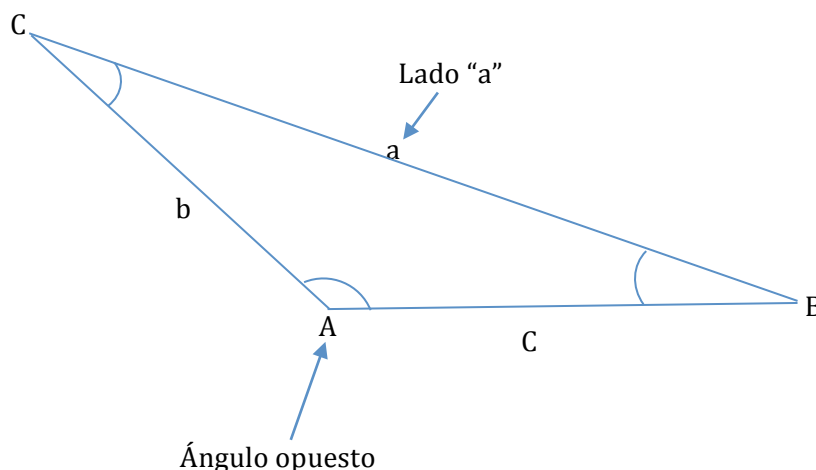
Triángulos Rectángulos y Oblicuángulos

Triángulos oblicuángulos: este tipo de triángulos son los que no tienen ángulos rectos, para resolverlos, necesitamos conocer tres de cualesquiera de sus elementos, exceptuando los tres ángulos.

1. Conocer un lado y dos ángulos.
2. Conocer dos lados y el ángulo opuesto a uno de los lados.
3. Conocer dos lados y el ángulo entre ellos.
4. Conocer los tres lados.

Para determinar los triángulos oblicuángulos, además de que se cumpla uno de los casos anteriores, se deben utilizar una de dos leyes, la de los senos o la de los cosenos.

Ley de los Senos: en ella se define que, para todo triángulo, el valor de sus lados es proporcional a los senos de los ángulos opuestos.



Triángulos Rectángulos y Oblicuángulos

Podemos expresar la ley de los senos de la siguiente manera:

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}$$

Los casos en lo que se puede utilizar esta ley son los siguientes: el 1 y 2, veamos un ejemplo de cada uno de ellos.

Caso 1 (dos ángulos y un lado):

Dados los siguientes datos, resolver el triángulo: $b=24$, $A= 35^\circ$ y $C= 77^\circ$

Solución: Estos datos claramente son el caso 1, dos ángulos y un lado.

1. Encontrar el ángulo faltante.

$$180 - (35 + 77) = 68$$

2. Ahora podemos encontrar el valor del lado a .

$$\frac{a}{\text{sen } (35)} = \frac{24}{\text{Sen } (68)} = \frac{c}{\text{Sen } (77)}$$

Para resolver a podemos dejar los dos primeros términos y despejar para a .

$$\begin{aligned} \frac{a}{\text{sen } (35)} &= \frac{24}{\text{Sen } (68)} = a = \frac{(24)(\text{sen}35)}{\text{sen}(68)} \\ a &= \frac{(24)(0.5736)}{(0.9272)} = 14.85 \end{aligned}$$

3. Hagamos el mismo procedimiento para encontrar el lado c .

$$\begin{aligned} \frac{14.85}{\text{sen } (35)} &= \frac{24}{\text{Sen } (68)} = \frac{c}{\text{Sen } (77)} \\ c &= \frac{(24)(\text{sen } 77)}{\text{sen}(68)} = \frac{(24)(0.9744)}{0.9272} = 25.22 \end{aligned}$$

Triángulos Rectángulos y Oblicuángulos

Caso 2 (dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos):

Resolver el triángulo ABC, sabiendo que $c=628$, $b=480$ y $C=55^\circ$

Solución: sabemos que se trata del caso 2 porque conocemos 2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

1. Acomodamos los datos que se conocen.

$$\frac{a}{\text{sen}(A)} = \frac{480}{\text{Sen}(B)} = \frac{628}{\text{Sen}(55)}$$

2. Observando las relaciones vemos que se puede calcular el ángulo B.

$$\frac{480}{\text{Sen}(B)} = \frac{628}{\text{Sen}(55)}$$

Despejamos

$$\text{sen } B = \frac{480(\text{sen } 55)}{628} = \frac{(480)(0.8208)}{628} = 0.6274$$

Para obtener B despejamos SEN, quedando

$$B = \text{sen}^{-1}(0.6274) = 38^\circ 50'$$

3. Conocidos dos ángulos podemos calcular el tercero que es A.

$$A = 180 - (38^\circ 50' + 55) = 86^\circ 10'$$

4. Por último, calculamos el valor del lado a.

$$a = \frac{(480)(\text{sen } 86^\circ 10')}{\text{sen}(38^\circ 50')} = \frac{(480)(0.9929)}{0.6271} = 759.99$$

Triángulos Rectángulos y Oblicuángulos

Ley de los Cosenos: En todo triángulo ABC, el cuadrado de un lado es igual a la suma del cuadrado de los otros dos lados, menos el doble producto de dichos lados multiplicados por el coseno del ángulo comprendido.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

Y de los casos ya presentados, tomamos el 3 y 4 que son los que se pueden resolver por esta ley.

Caso 3 (dos lados y el ángulo entre ellos):

Resolver el triángulo ABC, sabiendo que $a=132$, $b=224$ y $C=28^\circ 40'$

Triángulos Rectángulos y Oblicuángulos

Solución: una vez identificado el caso 3, donde tenemos 2 lados y el ángulo entre ellos, procedemos a resolver los elementos faltantes, que son el lado c y los ángulos A y B .

1. Podemos calcular el lado C .

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Sustituimos y resolvemos.

$$\begin{aligned}c^2 &= 132^2 + 224^2 - 2(132)(224) \cos(28^\circ 40') \\c^2 &= 17424 + 50176 - (59136)(0.8774) \\c^2 &= 15714.0736 \\c &= \sqrt{15714.0736} = 125.3558\end{aligned}$$

2. Ahora como ya conocemos los 3 lados y un ángulo, podemos usar a ley de los SENOS para calcular otro de los ángulos.

$$\begin{aligned}\frac{a}{\operatorname{sen} A} &= \frac{b}{\operatorname{Sen} B} = \frac{c}{\operatorname{Sen} C} \\ \frac{132}{\operatorname{sen} A} &= \frac{224}{\operatorname{Sen} B} = \frac{125.3558}{\operatorname{Sen} (28^\circ 40')} \\ \frac{132}{\operatorname{sen} A} &= \frac{125.3558}{\operatorname{Sen} (28^\circ 40')} \\ \frac{132}{\operatorname{sen} A} &= \frac{0.4797}{\operatorname{Sen} (28^\circ 40')} \\ \operatorname{sen} A &= \frac{(132)(0.4797)}{125.3558} = 0.5051 \\ A &= \sin^{-1}(0.5051) = 30.33 = 30^\circ 22'\end{aligned}$$

3. Por último, calculamos el ángulo faltante B .

$$B = 180^\circ - (28^\circ 40' + 30^\circ 22') = 120^\circ 58'$$

Triángulos Rectángulos y Oblicuángulos

Caso 4 (Conocer los 3 lados):

Resolver el triángulo ABC sabiendo que $a=132$, $b=224$ y $c= 125.3558$

Solución: Sabemos que es el caso 4 porque solo conocemos los valores de los lados.

Nota: este problema toma los datos del anterior a propósito para comprobar que los cálculos son correctos.

1. Podemos calcular el ángulo A.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Sustituimos y resolvemos.

$$(132)^2 = 224^2 + 125.3558^2 - 2(224)(125.3558) \cos A$$

$$17424 = 50176 + 15714.0766 - (56159.40) \cos A$$

$$17424 = 65890.0766 - (56159.40) \cos A$$

$$17424 - 65890.0766 = -(56159.40) \cos A$$

$$-48466.0766 = -(56159.40) \cos A$$

$$\frac{-48466.0766}{-(56159.40)} = \cos A$$

$$0.8630 = \cos A$$

$$\cos^{-1}(0.8630) = A$$

$A = 30^{\circ}20'$ (como es una igualdad, podemos invertir los términos)

2. De igual forma calcularemos el ángulo B.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$224^2 = 132^2 + 125.3558^2 - 2(132)(125.3558) \cos B$$

$$50176 = 33138.0766 - (33093.9312) \cos B$$

$$\cos B = \frac{17037.9234}{-33093.9312} = -0.5148$$

$$B = \cos^{-1}(-0.5148) = 120^{\circ}59'$$

3. Por último, calculamos el ángulo faltante C.

$$C = 180^{\circ} - (30^{\circ}20' + 120^{\circ}59') = 28^{\circ}41'$$