Expresiones Algebraicas, Operaciones con Monomios y Polinomios

En nuestra vida diaria, los seres humanos nos comunicamos con "**expresiones**"; es decir, para dar un mensaje o transmitir una idea es necesario presentarlo o decirlo de alguna forma; por ejemplo, si algo nos gusta o nos disgusta, si nos asombramos, si estamos aburridos, etc. Aún más, en esta era de la comunicación digital, como son las redes sociales (Twitter, Facebook, WhatsApp, Instagram, etc.) cuando se escribe un texto, se tiene la opción de agregar una imagen (Emoji) que indica un estado de ánimo, una reacción o incluso acciones, estas imágenes son también expresiones.

😂 😡 🏃

En el lenguaje de las matemáticas también se utilizan expresiones para indicar qué operaciones, relaciones, funciones, etc. se deben realizar para definir una cantidad, por ejemplo, en la siguiente "**expresión**" decimos que:

$$x + 2y = 5$$

Un número, sumado al doble de otro número, nos da como resultado 5. Lo que se hizo en este caso fue "**traducir**" la expresión presentada al idioma español. Es muy importante que un estudiante entienda este lenguaje porque en la interpretación de los símbolos matemáticos encontrará qué debe hacer para llegar a una respuesta.

La expresión matemática está formada básicamente de dos tipos principales de elementos que son los operandos (a, b, x, y, 5,x^2, 2x, $3y^4$, etc.) , que significa con quienes se realizará la acción; y los operadores (+, -, /, √,≤, etc.), que son las acciones a realizar.

A los primeros se les conoce también como términos de una expresión y este es el nombre que más se utiliza en el lenguaje matemático. Haciendo una semejanza con el español, diríamos que es como tener "**sujeto y predicado**", que al juntarse indican, nuevamente, un estado de ánimo, acción, reacción o descripción de una situación.

Es importante mencionar que en el álgebra se utilizan números (de los que ya se habló) y letras, estas últimas también son números pero que no siempre valen lo mismo y su valor dependerá de la situación o contexto en el que se encuentren. Por ejemplo, la velocidad de un automóvil se reconoce como "v" y se utiliza una letra porque existen muchos diferentes valores dependiendo del contexto. A estas letras se les conoce como literales (que proviene de letras) o variables (por el hecho de que su valor puede cambiar).

Veamos algunos ejemplos de literales o variables, recordemos que las variables son número de los que no conocemos su valor (magnitud).

- Un número => a
- Otro número => x
- El doble de un número => 2a o 2x
- El cuadrado de un número => x^2 o a^2
- La mitad de un número => $\frac{x}{2}$

Con los números anteriores se pueden formar expresiones, como:

- Un número menos otro número => $a - y$
- El doble de un número más ese mismo número => $2x + x$
- Dos números que sumados dan 25 => $a + x = 25$

Cuando se tiene solo un término en una expresión (sin acción) como puede ser 3x, se le conoce como monomio (palabra compuesta que significa un = mono y nomos = parte). Cuando se tienen dos términos, generalmente separados por una operación algebraica, se le llama binomio; cuando son tres, trinomio y cuando son más, polinomio.

Ejemplos:

- ax^2 => Monomio
- $15y^3 - 9$ => Binomio
- $b^2c^3 + ab^2c^2 - xy$ => Trinomio
- $45bc^2 - 12ab + 9ca^3b^3 + a$ => Polinomio

Los componentes de un monomio son:

Exponente

O

Potencia

Coeficiente

$$2a^5$$

Variable

Expresiones Algebraicas, Operaciones con Monomios y Polinomios

En el álgebra, al igual que en la aritmética, se realizan operaciones como la suma, resta, multiplicación y división, solo que para el álgebra aplican algunas reglas de cómo realizar estas operaciones. Veamos primero las operaciones entre monomios.

Suma y resta de monomios:

Las letras representan cantidades de algo (sillas, mesas, velocidad, estatura, densidad, etc.), hay que tener muy en cuenta que si se escoge una variable (letra) para expresar cierta cantidad (digamos sillas), no se debe cambiar el significado de esa variable; si se tiene otro artículo hay que asignarle una nueva letra. El procedimiento para realizar la suma o resta es:

1. Las variables deben ser la misma y con el mismo exponente, nunca con exponentes diferentes.
2. Se suman o restan los coeficientes (según sea el caso).
3. Se presenta el resultado.

Ejemplo:

$2a + 3a = 5a$

$5x - 2x = 3x$

<u>**Si las variables tienen diferente exponente no se realiza la suma.**</u>

$13y^2 + 9b - 2y + b + y^2 = 10b + 14y^2 - 2y$ (nótese_que el monomio 2y no tuvo cambios)

Multiplicación de monomios: Para realizar esta operación es importante notar que, en este tipo de operaciones, sí se puede realizar la multiplicación aunque la variable tenga diferente exponente. El procedimiento es como sigue:

1. Identificar qué términos tienen las mismas variables.
2. Se multiplican los coeficientes de los términos.
3. En el caso de las variables se suman los exponentes.
4. Por último, presentamos la expresión resultante.

Ejemplos:

⇨ $(5a^2b^3)\,(2b) = 10a^2b^4$ (a^2 no sufre cambios).

⇨ $(-2\,x^3)\,(3xy^5) = -6\,x^{3+1}+1\,y^5 = 6\,x^4\,y^5$

⇨ $\left(3x^{\frac{1}{2}}\right)\left(-x^2\right) = -3x^{\frac{1}{2}+2} = 3x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}}$

División de monomios: Para esta operación, al contrario de la multiplicación, los exponentes de la variable se restan. Si por alguna razón el exponente es negativo, la variable pasa al denominador con exponente positivo. El procedimiento es semejante al de la multiplicación:

1. Identificar las variables que pueden operarse (iguales).
2. Dividir los coeficientes.
3. Realizar la operación con las variables restando los exponentes (dividendo – divisor).
4. Presentar el resultado.

Por lo general, una división se presenta de la forma $\frac{monimio1}{monomio2}$

Ejemplos:

⇨ $\frac{4x^2}{2x} = 2x^{2-1} = 2x$

⇨ $\frac{15a^3b}{9ab^2} = \frac{5a^2b^{-1}}{3} = \frac{5a^2}{3b}$

(nótese que b-1 pasó a la parte de abajo con exponente positivo)

⇨ $\frac{7a^4b^5c^2}{2ab^4c^2} = \frac{7a^3b}{2}$

⇨ $\frac{2x^6y^2z^7}{2x^6z^7c} = \frac{y^2}{c}$

Sumas/Restas de polinomios: Las operaciones que involucran polinomios se realizan de manera semejante, ya que al final las operaciones se realizan monomio a monomio. Veamos unos ejemplos.

Problema 1: $(x^2 + 5xy - 7y^3) + (-9x^2 + 3y^3 - 10xy^2)$

Solución: siguiendo los pasos de la suma de monomios tendremos que:

1. Buscar, cuáles términos se pueden operar entre sí, por ejemplo, el $5xy$ y el $-10xy^2$ no tienen término semejante para realizar la operación, así que se quedan sin cambio (igual).
2. Como los demás términos sí tienen uno semejante, realizamos las sumas/restas según sea el caso, de la misma forma que con los monomios.

$$x^2 - 9x^2 = -8x^2;\ -7y^3 + 3y^3 = -4y^3$$

3. Acomodando los términos, el resultado queda así:

$-8x^2 - 10xy^2 + 5xy - 4y^3$

Problema 2: $(x^2 + 5xy - 7y^3) - (-9x^2 + 3y^3 - 10xy^2)$

Solución: siguiendo los pasos de la suma de monomios tendremos que:

Nota: el signo de menos antes del segundo grupo de paréntesis, ocasiona que todos los signos de ese polinomio cambien (de + a − o de − a +).

4. Buscar cuáles términos se pueden operar entre sí. Por ejemplo, el $5xy$ y el $10xy^2$ no tienen término semejante para realizar la operación, así que se quedan sin cambio (igual).
5. Como los demás términos sí tienen uno semejante, realizamos las sumas/restas según sea el caso, de la misma forma que con los monomios.

$$x^2 + 9x^2 = 10x^2;\ -7y^3 - 3y^3 = -10y^3$$

6. Acomodando los términos el resultado queda:

$10x^2 + 10xy^2 + 5xy - 10y^3$

En los ejemplos anteriores, aunque parecen iguales, el cambio del signo antes del segundo grupo de paréntesis hace que el resultado final sea muy diferente.

Multiplicación de polinomios: como ya mencionamos en las sumas/restas, las operaciones se terminan haciendo término a término siguiendo las mismas reglas que con los monomios. Vamos un ejemplo que nos ayude a entender esto.

Problema:

$$\left(5ab^4 + 2d^3c\right)\left(3a - 9d + 1\right)$$

Solución: Para mejor explicación del procedimiento, descompondremos este problema en problemas más pequeños para enfatizar lo que dijimos anteriormente: "son multiplicaciones de monomios".

1. Como en el primer grupo de paréntesis hay dos términos, cada uno de ellos se debe multiplicar por todos los términos del siguiente grupo de paréntesis; es como si tuviéramos 2 operaciones de multiplicación.

   ⇨ $(5ab^4)(3a-9d+1)$ y

   ⇨ $(2d^3c)(3a-9d+1)$ hay que notar que el segundo grupo de paréntesis no cambia.

2. No es necesario profundizar más; sin embargo, cada uno de los dos problemas resultantes se resuelve multiplicando el término de la izquierda por cada uno de los términos de la derecha. Multiplicando cada término tendremos:

   $$(5ab^4)(3a-9d+1)=15a^2b^4-45ab^4d+5ab^4$$

   $$(2d^3c)(3a-9d+1)=6ad^3-18d^4c+2d^3c$$

3. Juntamos los dos resultados y simplificamos hasta donde sea posible y el resultado es:

$$15a^2b^4+5ab^4-45ab^4d+6acd^3-18d^4c+2d^3c$$

División de polinomios: Esta operación es un poco más elaborada en su proceso de desarrollo para encontrar un resultado. Presentaremos un procedimiento (algoritmo) que nos permita llegar a la solución.

División de un polinomio por un polinomio.

Para dividir dos polinomios se procede de la manera siguiente:

1) Se ordenan el dividendo y el divisor con respecto a una misma letra.

2) Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, obteniéndose así el primer término del cociente.

3) Se multiplica el primer término del cociente por todo el divisor y el producto así obtenido se resta del dividendo, para lo cual se le cambia de signo y se escribe cada término abajo de su semejante. En el caso de que algún término de este producto no tenga ningún término semejante en el dividendo, se escribe dicho término en el lugar que le corresponda de acuerdo con la ordenación del dividendo y del divisor.

4) Se divide el primer término del resto entre el primer término del divisor, obteniéndose de este modo el segundo término del cociente.

5) El segundo término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto así obtenido se resta del dividendo, cambiándole todos los signos.

6) Dividir el primer término del segundo resto entre el primer término del divisor y se repiten las operaciones anteriores hasta obtener cero como resto.

Veamos un ejemplo que utilice el procedimiento antes descrito:

Problema:

$$5x^2 + xy - 3y^2 \overline{\smash{\big)}\,15x^4 - 7x^3y - 6x^2y^2 + 7xy^3 - 3y^4}$$

Solución:

1. Este paso lo obviaremos puesto que las dos expresiones ya están acomodadas, con respecto a la x, lo que se hace es poner la de mayor exponente primero y después las que tengan menor exponenete.

2. Dividir dividendo (lo de adentro) por divisor (lo de afuera), los primeros términos de cada uno.

   $15x^4 \div 5x^2 = 3x^{4-2} = 3x^2$

3. El resultado se multiplica por el divisor (afuera) y se resta del dividendo (adentro).

   Multiplicando:
   $(3x^2)(5x^2 + xy - 3y^2) = 15x^4 + 3x^3y - 9x^2y^2$

   Restando:
   $$\begin{array}{l} \quad 15x^4 - 7x^3y - 6x^2y^2 + 7xy^3 - 3y^4 \\ -15x^4 - 3x^3y + 9x^2y^2 \\ \hline \quad 0 \quad -10x^3y + 3x^2y^2 + 7xy^3 - 3y^4 \quad (nuevo\ dividendo) \end{array}$$

4. Dividiendo nuevamente el primer término del nuevo dividendo, por el primer término del divisor.

   $-10x^3y \div 5x^2 = -2xy$

5. Nuevamente se multiplica el término obtenido "$-2xy$" por el divisor y se resta del nuevo dividendo.

   Multiplicando:
   $(-2xy)(5x^2 + xy - 3y^2) = -10x^3y - 2x^2y^2 + 6xy^3$

   Restando:
   $$\begin{array}{l} -10x^3y + 3x^2y^2 + 7xy^3 - 3y^4 \\ \quad 10x^3y + 2x^2y^2 - 6xy^3 \\ \hline \qquad 0 \quad + 5x^2y^2 + xy^3 - 3y^4 \end{array}$$

6. Repetir el proceso, hasta que el residuo sea cero o ya no sea posible seguir dividiendo.

   $5x^2y^2 \quad \div \quad 5x^2 \quad = y^2$

   Multiplicando:

   $(y^2)(5x^2 + xy - 3y^2) = 5x^2y^2 + xy^3 - 3y^4$

   Restando:
   $$\begin{array}{c} \quad 5x^2y^2 + xy^3 - 3y^4 \\ -5x^2y^2 - xy^3 + 3y^4 \\ \hline 0 \end{array}$$

   El resultado será: $3x^2 - 2xy + y^2$

El problema de manera menos detallada se verá de la siguiente forma:

Solución:

$$
\begin{array}{r l}
 & 3x^2 - 2xy + y^2 \\ \cline{2-2}
5x^2 + xy - 3y^2 \big) & 15x^4 - 7x^3y - 6x^2y^2 + 7xy^3 - 3y^4 \\
 & \underline{-15x^4 - 3x^3y + 9x^2y^2} \\
 & \qquad -10x^3y + 3x^2y^2 + 7xy^3 - 3y^4 \\
 & \qquad \underline{10x^3y + 2x^2y^2 - 6xy^3} \\
 & \qquad\qquad 5x^2y^2 + xy^3 - 3y^4 \\
 & \qquad\qquad -5x^2y^2 - xy^3 + 3y^4
\end{array}
$$