

# ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS Y SU RELEVANCIA EN EL CONTROL DE PROCESOS

## 1. INTRODUCCIÓN AL CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS

El “Control Estadístico de Procesos” nació a finales de los años 20 en los Bell Laboratories. Su creador fue W. A. Shewhart, quien en su libro “Economic Control of Quality of Manufactured Products” (1931) marcó la pauta que seguirían otros discípulos distinguidos (Joseph Juran, W.E. Deming, etc.). Sobre este libro han pasado más de 70 años y sigue sorprendiendo por su frescura y actualidad. Resulta admirable el ingenio con el que plantea la resolución de problemas numéricos pese a las evidentes limitaciones de los medios de cálculo disponibles en su época.

Lamentablemente, a Shewhart se le recuerda “solo por los gráficos de control” (X-R, etc.). Por si fuera poco, a menudo se emplean estos gráficos de modo incorrecto o se desconoce las limitaciones de estos. Normalmente, la utilización incorrecta de los gráficos de control dimana del desconocimiento de los fundamentos estadísticos que los sustentan. Por esta razón se ha considerado conveniente hacer hincapié en los fundamentos estadísticos (párrafos 3 y 5), el problema del sobre ajuste del proceso (ver párrafo 6) y las limitaciones que presentan para la detección de derivas en los procesos y aumentos en la variabilidad en los mismos (ver párrafo 8).

## 2. ¿POR QUÉ VARÍAN LOS PROCESOS?

Un proceso industrial está sometido a una serie de factores de carácter aleatorio que hacen **imposible fabricar dos productos exactamente iguales**. Dicho de otra manera, las características del producto fabricado no son uniformes y presentan una **variabilidad**. Esta variabilidad es claramente indeseable y **el objetivo ha de ser reducirla lo más posible o al menos mantenerla dentro de unos límites**. El *Control Estadístico de Procesos* es una herramienta útil para alcanzar este segundo objetivo. Dado que su aplicación es en el momento de la fabricación, puede decirse que esta herramienta contribuye a la **mejora de la calidad de la fabricación**.

Permite también aumentar el conocimiento del proceso (puesto que se le está tomando “*el pulso*” de manera habitual) lo cual en algunos casos puede dar lugar a la mejora de este.

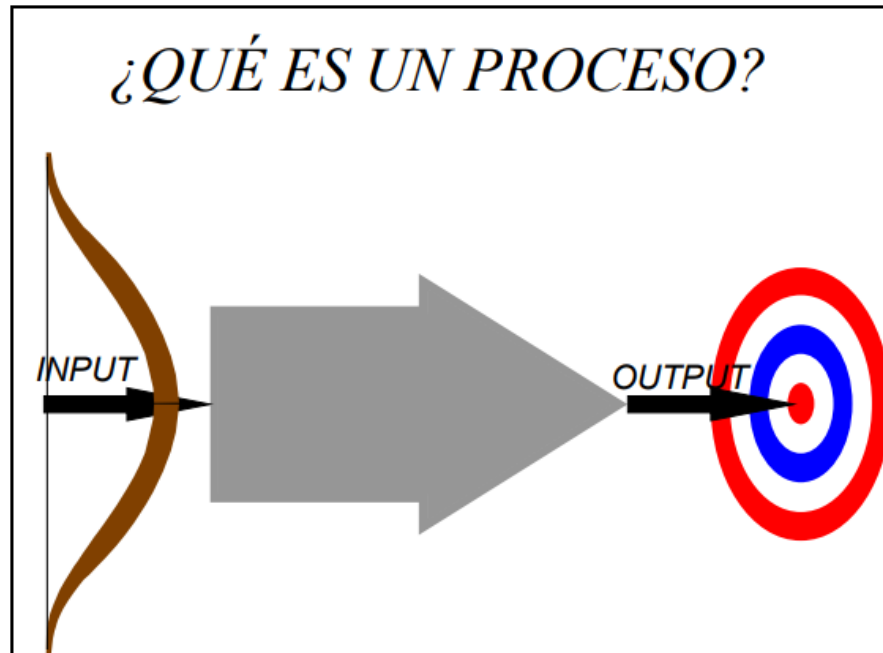


Figura 1

### 3. FUNDAMENTOS ESTADÍSTICOS.

Para el entendimiento del *Control Estadístico de Procesos* no es necesario ser un experto en estadística, pero es preciso recordar al menos los puntos que se describen a continuación.

#### a) Distribución Normal o Campana de Gauss.

La distribución normal es desde luego la función de densidad de probabilidad “estrella” en estadística. Depende de dos parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , que son la media y la desviación típica respectivamente. Tiene una forma acampanada (de ahí su nombre) y es simétrica respecto a  $\mu$ . Llevando múltiplos de  $\sigma$  a ambos lados de  $\mu$ , nos encontramos con que el 68% de la población está contenido en un entorno  $\pm 1\sigma$  alrededor de  $\mu$ , el 95% de la población está contenido en un entorno  $\pm 2\sigma$  alrededor de  $\mu$  y que el 99,73% está comprendido en  $\pm 3\sigma$  alrededor de  $\mu$ .

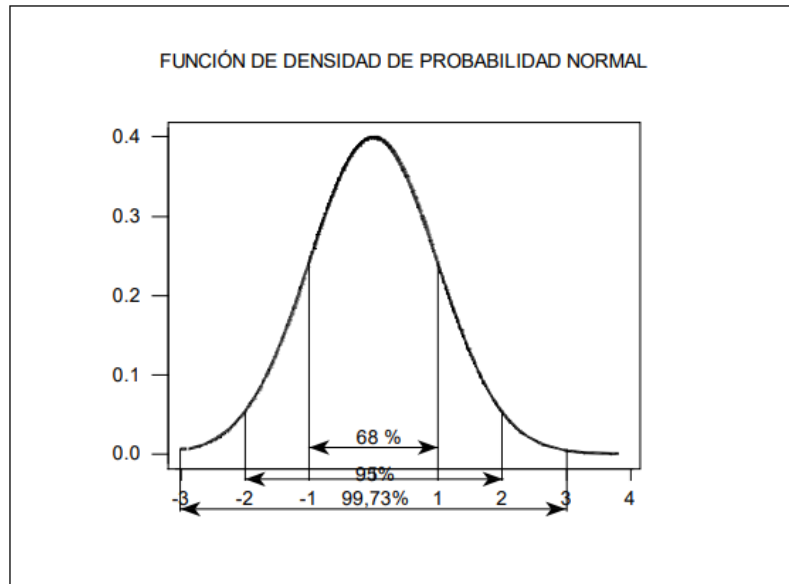


Figura 2 Función de densidad de probabilidad normal

#### b) Teorema del Límite Central.

El teorema del límite central (TLC) establece que si una variable aleatoria (v. a.) se obtiene como una suma de muchas causas independientes, siendo cada una de ellas de poca importancia respecto al conjunto, entonces su distribución es asintóticamente normal. Es decir:

Si

$X = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  donde las  $x_i$  son v. a de media  $\mu_i$  y varianza  $\sigma_i^2$

Entonces:  $X \rightarrow N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}\right)$

#### c) Distribución de las medias muestrales

Si  $X$  es una v. a  $N(\mu, \sigma)$  de la que se extraen muestras de tamaño  $n$ , entonces las medias muestrales se distribuyen según otra ley normal:

$$\bar{x}_m \propto N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Obsérvese que como consecuencia del TLC, la distribución de las medias muestrales tiende a ser normal aún en el caso que la población base no lo sea, siempre que el tamaño de la muestra sea suficientemente grande  $n \geq 25$ , si bien este número depende de la asimetría de la distribución.

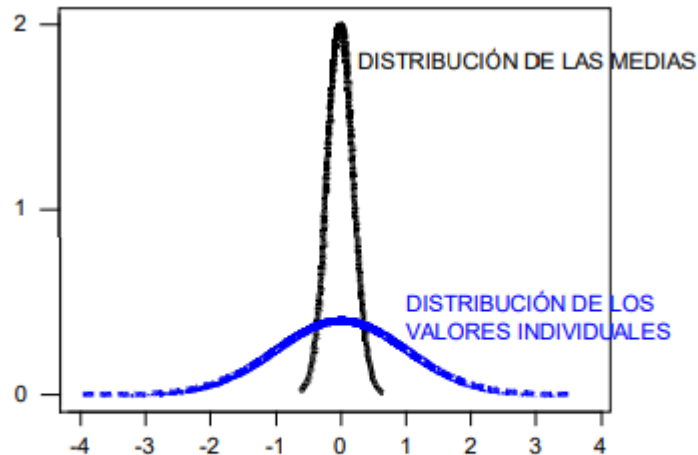


Figura 3: Función de densidad de las medias muestrales

#### 4. CAUSAS COMUNES Y CAUSAS ASIGNABLES O ESPECIALES.

De acuerdo con lo dicho en la introducción, el proceso está afectado por un gran número de factores sometidos a una variabilidad (por ejemplo, oscilaciones de las características del material utilizado, variaciones de temperatura y humedad ambiental, variabilidad introducida por el operario, repetitividad propia de la maquinaria utilizada, etc.), que inciden en él y que inducen una variabilidad de las características del producto fabricado.

Si el proceso está operando de manera que existen pequeñas oscilaciones de todos estos factores, pero de modo que ninguno de ellos tiene un efecto preponderante frente a los demás, entonces en virtud del TLC es esperable que la característica de calidad del producto fabricado se distribuya de acuerdo con una ley normal. Al conjunto de esta multitud de factores se denominan **causas comunes**. Por el contrario, si circunstancialmente incide un factor con un efecto preponderante, entonces la distribución de la característica de calidad no tiene por qué seguir una ley normal y se dice que está presente una **causa especial** o **asignable**.

Por ejemplo, si en un proceso industrial se está utilizando materias primas procedentes de un lote homogéneo y se continúa la fabricación con materias primas procedentes de otro lote, cuyas características son muy diferentes de las anteriores, es muy posible que las características de los productos fabricados sean significativamente distintas a partir de la utilización del nuevo lote.

Por definición, se dice que un proceso está bajo control estadístico cuando no hay causas asignables presentes. El Control Estadístico de Procesos se basa en analizar la información aportada por el proceso para detectar la presencia de causas asignables y habitualmente se realiza mediante una construcción gráfica denominada Gráfico de Control.

Si el proceso se encuentra bajo control estadístico es posible realizar una predicción del intervalo en el que se encontrarán las características de la pieza fabricada.

## **5. ¿QUÉ CONDICIONES HACEN FALTA PARA QUE SE PUEDA APLICAR EL GRÁFICO DE CONTROL?**

Para que tenga sentido la aplicación de los gráficos de control, el proceso ha de tener una estabilidad suficiente que, aun siendo aleatorio, permita un cierto grado de predicción. En general, un proceso caótico no es previsible y no puede ser controlado. A estos procesos no se les puede aplicar el gráfico de control ni tiene sentido hablar de capacidad. Un proceso de este tipo debe ser estudiado mediante herramientas estadísticas avanzadas hasta que el grado de conocimiento empírico obtenido sobre el mismo permita conocer las causas de la estabilidad y se eliminen.

En lo sucesivo, se supondrá que los procesos tienen un cierto grado de estabilidad. Podemos distinguir dos casos:

- El proceso está regido por una función de probabilidad cuyos parámetros permanecen constantes a lo largo del tiempo. Este sería el caso de un proceso normal de media constante y desviación típica constante. Este es el caso ideal y al que se pueden aplicar los gráficos de control para detectar la presencia de causas asignables.

- El proceso está regido por una función de probabilidad, alguno de cuyos parámetros varía ligeramente a lo largo del tiempo. Este sería el caso de un proceso normal cuya media varía a lo largo del tiempo (por ejemplo, una herramienta de corte que va desgastando la cuchilla de corte). Estrictamente hablando, este desgaste de la herramienta sería una causa especial; sin embargo, si puede conocerse la velocidad de desgaste, podría compensarse resultando un proceso análogo al caso anterior.

Puede ocurrir que las características propias del proceso hagan que alguno de los factores de variabilidad intrínsecos al mismo, tenga un efecto preponderante, de modo que en este caso la distribución no sea normal. Un ejemplo puede ser la distribución de los diámetros de un proceso de taladrado, cuyo valor inferior está limitado por el propio diámetro de la broca, mientras que la distribución presenta una cola hacia diámetros mayores debido a posibles incidencias oblicuas de la broca. En este caso, se dice que el proceso está bajo control estadístico cuando no hay otras causas asignables presentes. Esto es equivalente a decir que el proceso permanezca estable, es decir que los parámetros de la distribución permanezcan invariables y por lo tanto puede realizarse una predicción del intervalo en el que se encontrarán los valores de la característica de respuesta.

Por lo tanto, debe tratar de conocerse todo lo que sea posible de los fundamentos tecnológicos del proceso, ya que puede dar pistas sobre el tipo de distribución que seguirán los datos. En ningún caso debe “darse la normalidad por supuesta”. Debe comprobarse y en caso de que los datos no sean normales, deben aplicarse métodos especiales.

### **Ejemplo -1: Ilustración de causas comunes en un proceso**

Un proceso de fabricación consiste en “lanzar 10 monedas al aire”. Se supone que las monedas son perfectas de manera que en el lanzamiento de cada una se tiene un 50% de probabilidades de obtener cara, y un 50% de obtener cruz. La calidad de cada lanzamiento de 10 monedas se mide según el número de caras obtenidas. Podríamos asimilar lo anterior a un proceso industrial

sometido a 10 causas de variabilidad no normales (binomiales en este caso). Al ser iguales, todas ellas tienen el mismo efecto sobre la variabilidad de la producción, por lo que las podremos considerar como causas comunes.

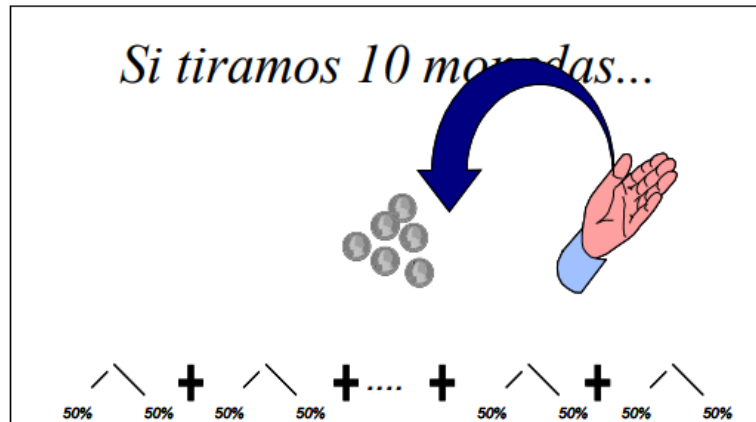


Figura 4: Simulación de un proceso sometido a causas comunes no normales

La teoría estadística nos enseña que la probabilidad de obtener exactamente  $x$  caras ( $0 \leq x \leq 10$ ) se calcula por la distribución binominal:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{(n-x)}$$

donde  $n$  es el número de monedas lanzadas (10 en este caso) y  $p$  la probabilidad de sacar cara con una moneda (0.5 en este caso). Si se representa gráficamente, se obtiene una función acampanada que recuerda a una gaussiana (ver Figura 7). Este hecho es una consecuencia del TLC. Si aumentara el número de monedas, la convergencia hacia la distribución normal sería aún mayor.

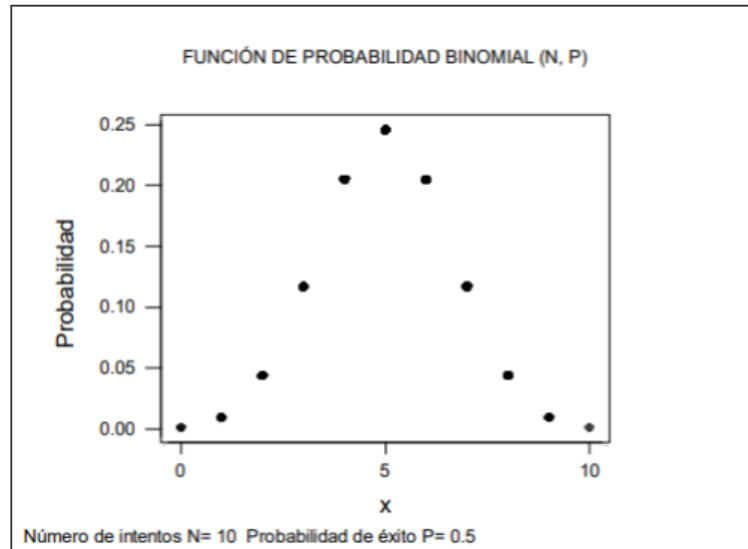


Figura 5: Función de probabilidad de la obtención de x caras lanzando 10 monedas.

## 6. CAPACIDAD DE PROCESO

### 6.1. CONCEPTO DE CAPACIDAD DE PROCESO

Como consecuencia de todo lo anterior, si un proceso normal está en control estadístico, la característica de calidad del 99,73% de los elementos fabricados estará comprendida entre  $\mu - 3\sigma$  y  $\mu + 3\sigma$ . El parámetro  $\mu$  depende del punto en el que centremos el proceso. Sin embargo,  $\sigma$  depende del número y variabilidad de las causas comunes del proceso y por lo tanto es intrínseca a él. Por lo tanto  $6\sigma$  es la Variabilidad Natural del Proceso o Capacidad del Proceso. Por definición:

**CAPACIDAD DEL PROCESO =  $6\sigma$**

Es esencial resaltar que la variabilidad natural del proceso,  $6\sigma$ , es intrínseca a él e independiente de las tolerancias que se asignen. Por lo tanto si  $6\sigma$  es menor que el intervalo de las tolerancias a cumplir, necesariamente algunos productos fabricados estarán fuera de tolerancia y serán no conformes. Si no se tiene en cuenta este hecho y se pretende corregir a base de reajustar el proceso, es decir modificar el centrado, lo único que se consigue es aumentar la variabilidad de este.

### 6.2. ÍNDICES $C_p$ Y $C_{pk}$



Con objeto de comparar la capacidad del proceso y la amplitud de las tolerancias a satisfacer, se define el **índice de capacidad de proceso**:

$$C_p = \frac{T_s - T_i}{6\sigma}$$

Si se pretende que la producción esté dentro de tolerancia, es necesario que  $C_p > 1$ .

Si el proceso no estuviese centrado, el valor de este índice falsearía el grado de cobertura con respecto a fabricar piezas fuera de tolerancias. En estos casos es más significativo el índice  $C_{pk}$  que se define:

$$C_{pk} = \min \left\{ \frac{T_s - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - T_i}{3\sigma} \right\}$$

De este modo se define un proceso capaz como aquel que  $C_{pk} > 1$ . Aplicando estos mismos conceptos a la variabilidad atribuible de una máquina de las que integran el proceso de fabricación, podemos definir la capacidad de máquina, el índice de capacidad de máquina  $C_M$  y  $C_{Mk}$ .

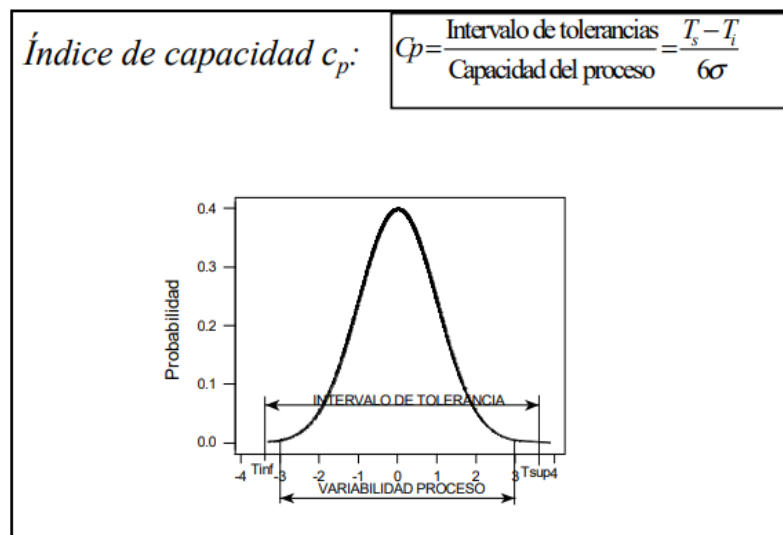


Figura 6: Índice  $C_p$

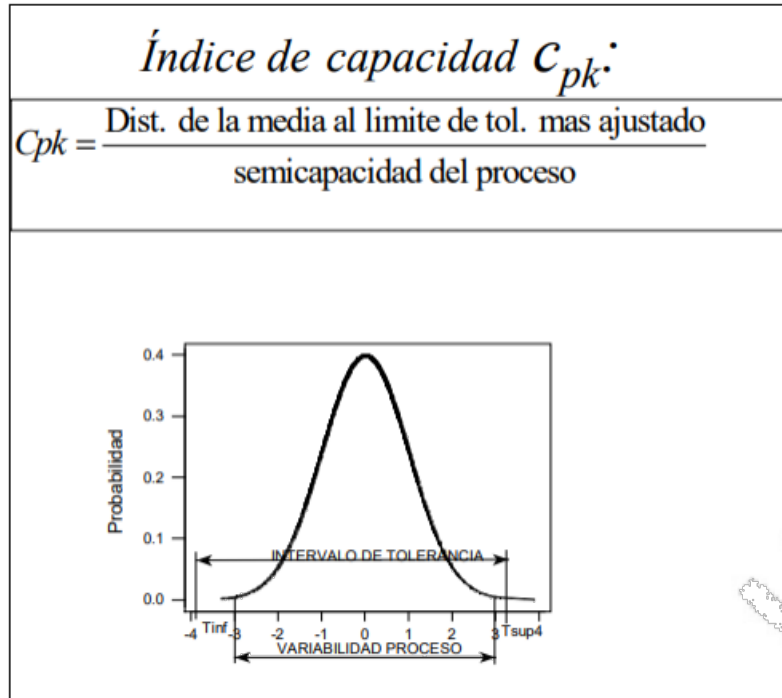


Figura 7: Índice  $C_{pk}$

### Ejemplo 2: La métrica “6 sigma”

En 1988 Motorola alcanzó el prestigioso Malcom Baldrige National Quality Award. Una de las bases fundamentales de su estrategia de calidad era el “Programa 6 $\sigma$ ”. El objetivo de este programa fue reducir la variación de los procesos de manera que el intervalo de tolerancia fuera igual a 12  $\sigma$  (6 a cada lado). De acuerdo con la definición del índice de capacidad de proceso:

$$C_p = \frac{12\sigma}{6\sigma} = 2$$

Suponiendo que se desplazase el proceso 1.5  $\sigma$ , ver Figura 10, los coeficientes pasarían a ser:

$$C_p = \frac{12\sigma}{6\sigma} = 2 \qquad C_{pk} = \frac{4,5\sigma}{3\sigma} = 1,5$$

Aún estas circunstancias, la cantidad de producto fuera de tolerancia sería tan solo de 3.4 ppm.

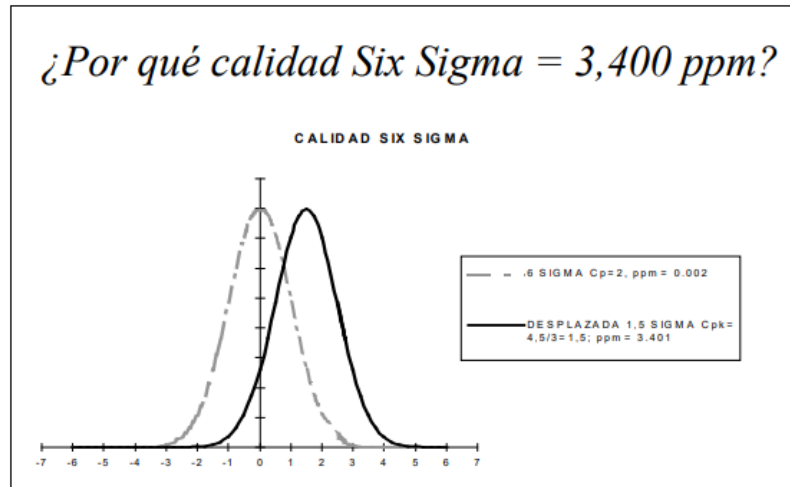


Figura 8

### 6.3. VARIABILIDAD A CORTO Y LARGO PLAZO

Un proceso productivo tiene habitualmente dos tipos de variabilidad: **Variabilidad inherente del proceso**. Aquella componente de la variabilidad debida a causas comunes solamente y representa la variabilidad que puede estar presente entre elementos fabricados en intervalos próximos (variabilidad en el corto plazo, ver Figura 9). Algunos autores denominan a este componente de la variabilidad como “ruido blanco”.

**Variabilidad total del proceso**. Es la variación resultante de todas las causas de variabilidad (causas comunes y especiales), en la que se tienen en cuenta factores como el desgaste, cambios de lote de materia prima, etc. Representa la variabilidad que puede afectar al conjunto de los elementos fabricados recibidos por el cliente (variabilidad en el largo plazo, ver Figura 9). Algunos autores denominan a este componente de la variabilidad como “ruido negro”.

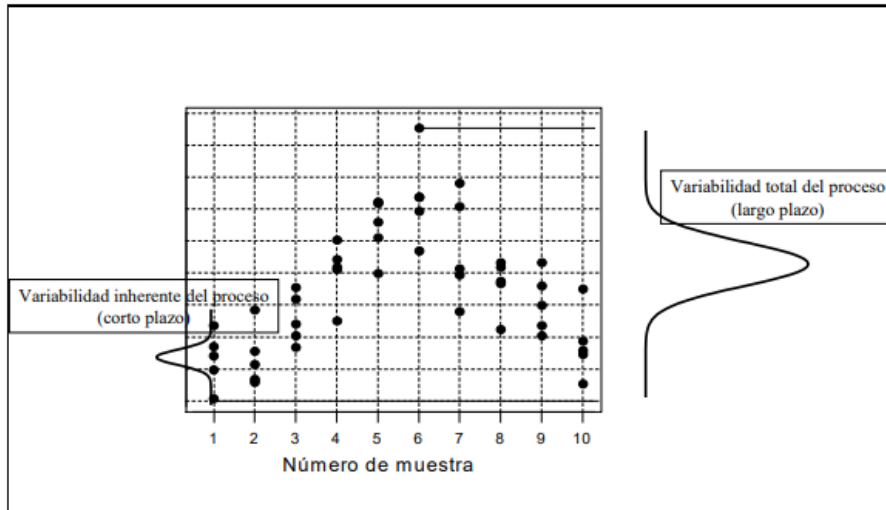


Figura 9 Descomposición de la variabilidad de un proceso

#### 6.4. POTENCIALIDAD DEL PROCESO. ÍNDICES $P_p$ Y $P_{pk}$

Durante mucho tiempo, ha existido la confusión sobre qué estimación de la variabilidad se debe utilizar para el cálculo de  $C_p$ ,  $C_{pk}$ . Precisamente para poner un poco de orden en todo esto, se introdujeron los índices  $P_p$ ,  $P_{pk}$ , de acuerdo con los siguientes criterios:

- $C_p$  y  $C_{pk}$  se calculan con la variabilidad inherente del proceso (variabilidad en el corto plazo). En este caso se considera la variabilidad entre los elementos de la misma muestra o muestras próximas.
- $P_p$  y  $P_{pk}$  se calculan con la variabilidad total del proceso (variabilidad en el largo plazo). En este caso se tiene en cuenta la variabilidad introducida por la deriva del centrado del proceso y la inestabilidad de este.

De manera general, se verifica que  $C_p > P_p$  y  $C_{pk} > P_{pk}$

Las ecuaciones de los índices quedan:

$$C_p = \frac{T_s - T_i}{6\sigma_{CP}} \quad C_{pk} = \min \left\{ \frac{T_s - \mu}{3\sigma_{CP}}, \frac{\mu - T_i}{3\sigma_{CP}} \right\}$$

$$P_p = \frac{T_s - T_i}{6\sigma_{LP}} \quad P_{pk} = \min \left\{ \frac{T_s - \mu}{3\sigma_{LP}}, \frac{\mu - T_i}{3\sigma_{LP}} \right\}$$

Los símbolos circunflejos “^” representan una estimación de la desviación típica considerada. Es preciso resaltar que la utilización de los coeficientes  $P_p$  y  $P_{pk}$  no tiene todavía una aceptación unánime. Tiene una aceptación muy amplia en entornos de automoción (QS 9000 / TS 16949, etc.) pero no así en otras áreas.

## 6.5. CONCEPTO DE GRUPO HOMOGÉNEO RACIONAL

A la hora de planificar la toma de muestras para realizar un estudio de capacidad de proceso o la implantación de un gráfico de control, resulta muy importante tener en cuenta el concepto de **grupo homogéneo racional** (GHR). Veamos un ejemplo. Supongamos una máquina de inyección de piezas de plástico de 16 cabezales. En la definición del gráfico de control se establece una toma de muestra horaria de 16 unidades (un racimo de inyección). Obviamente el diferente tamaño de los cabezales es una fuente de variabilidad que muy probablemente puede hacerse presente. Por esta razón en la toma de muestras debe estudiarse no solo la variabilidad entre las inyecciones, sino también la variabilidad entre cabezales.

## 7. GRÁFICOS DE CONTROL POR VARIABLES: GRÁFICOS DE SHEWHART

Supongamos que un proceso se encuentra bajo control estadístico y por lo tanto su distribución es  $N(\mu, \sigma)$ . Si se extrae una muestra de tamaño  $n$  y su media muestral se encuentra comprendida fuera del intervalo comprendido entre  $\mu - 3\sigma\sqrt{n}$  y  $\mu + 3\sigma\sqrt{n}$  (llamados límites de control inferior y superior respectivamente), podemos justificar este hecho de dos modos distintos:

- a) De acuerdo con el modelo teórico supuesto sabemos que el 0,27% de las muestras (es decir 27 muestras de cada 10,000) tendrán una media fuera de este intervalo y la muestra que hemos extraído es una de ellas.
- b) Es muy improbable obtener una muestra de estas características si realmente el modelo es el supuesto, de modo que parece más verosímil pensar que el proceso no está bajo control estadístico y por lo tanto la hipótesis de que se distribuye en ese momento según una  $N(\mu, \sigma)$  es falsa.

Por el contrario, si la media muestral está comprendida dentro del intervalo anterior, no tendremos ninguna razón de peso para pensar que el proceso no se encuentra bajo control estadístico (el resultado es coherente con el modelo supuesto). Lo anterior no quiere decir que podamos estar absolutamente seguros de que el proceso se encuentre bajo control estadístico, sino que no tenemos la evidencia de que no lo está.

El *Control Estadístico de Procesos* se basa en repetir esta toma de muestras de manera periódica, calcular la media muestral y representar un gráfico de una manera similar a la Figura 10, de modo que si la media cae fuera de los límites de control existe la evidencia de que hay una causa asignable presente (proceso fuera de control). A este gráfico se le denomina *Gráfico de Medias* o simplemente *Gráfico  $\bar{X}$* .

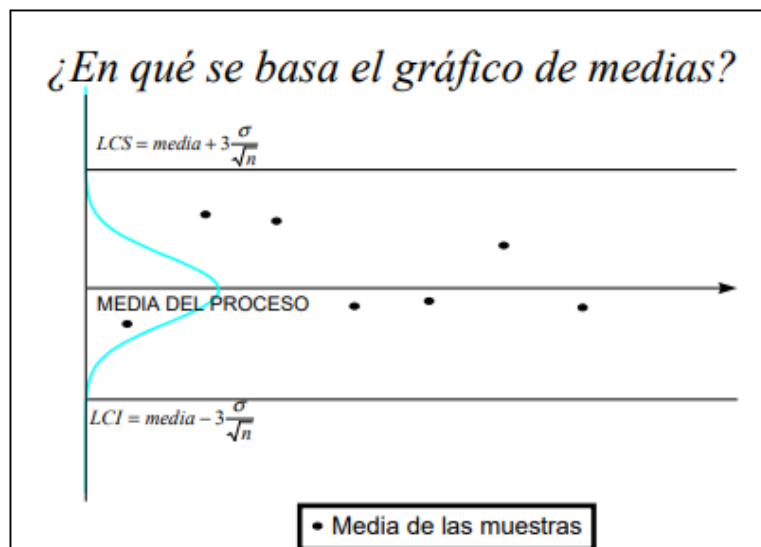


Figura 10 Fundamento del gráfico de medias

El análisis de las muestras no se debe detener simplemente construyendo un Gráfico de Medias ya que aún pueden proporcionar más información del comportamiento del proceso. En efecto, la dispersión de los valores muestrales nos puede proporcionar una estimación de la dispersión del proceso y realizar un seguimiento de su evolución. Es sabido que la dispersión de los valores de una población se mide por su desviación típica  $\sigma$  y los estimadores

muestrales utilizados más frecuentemente son el recorrido R (que en nuestro caso dará lugar al Gráfico de Rangos o Recorridos o simplemente Gráfico R) y la desviación típica muestral S (que dará lugar al Gráfico de desviaciones típicas o simplemente Gráfico S). Antes de seguir adelante es conveniente recordar algunas propiedades de estos estadísticos con objeto de alcanzar un mejor entendimiento de la construcción de estos gráficos.

#### a) Rango o recorrido muestral

Se define como la diferencia entre el mayor valor presente en la muestra y el menor valor. Por su propia construcción, este estadístico da una estimación de la dispersión de la población de la que procede. Presenta la ventaja de que se calcula muy fácilmente y para valores muestrales pequeños  $n \leq 8$  se comporta bien. Para valores mayores da una estimación sobrevalorada de la dispersión de la población. Existen tablas aplicables a procesos normales que, en función del tamaño de la muestra, proporcionan la función de distribución del estadístico  $w = R/\sigma$ , denominado "recorrido relativo" y también la  $E(w) = d_2$  y  $\sigma_w = d_3$ .

#### b) Desviación típica muestral

Es conveniente recordar que en los textos se utilizan dos estadísticos distintos. El primero de ellos se define:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Para procesos normales, la esperanza matemática de la varianza muestral es:

$$E(s^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

Por lo que es un estimador sesgado de la varianza poblacional  $\sigma^2$ . Por esta razón algunas veces se toma como varianza muestral al estimador insesgado definido:

$$s^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Este estimador de la varianza  $\sigma^2$  es insesgado y además  $n - 1$  son los grados de libertad de la muestra. Por estas razones, en ingeniería de calidad es más frecuente emplear  $s^*$ .

Las varianzas de ambos estadísticos son, para procesos normales:

$$Var(s^2) = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4 \quad Var(s^*) = \frac{2}{n-1} \sigma^4$$

Puede comprobarse que el error cuadrático medio de  $s^2$  es inferior al de  $s^{*2}$ . En Control Estadístico de Procesos es habitual operar con desviaciones típicas en lugar de con varianzas, por lo que es necesario conocer  $E(s)$ ,  $E(s^*)$ ,  $\sigma_s$ ,  $\sigma_{s^*}$ .

$$E(s) = \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]} \sigma = c_2 \sigma \quad E(s^*) = \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]} \sigma = c_4 \sigma$$

En este caso ambos estadísticos son estimadores sesgados de  $\sigma$ .

$$\sigma_s = \sigma \sqrt{1 - c_2^2} - \frac{1}{n} \quad \sigma_{s^*} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}$$

## CONSTRUCCIÓN DEL GRÁFICO $\bar{X} - R$

i) Caso  $\mu$ ,  $\sigma$  conocidos.

Si  $\mu$  y  $\sigma$  son conocidos entonces la construcción del gráfico de medias es inmediata a partir de su definición:

$$LCS = \mu + \frac{3}{\sqrt{n}} \sigma = \mu + A\sigma$$

$$LC = \mu$$

$$LCI = \mu - \frac{3}{\sqrt{n}} \sigma = \mu - A\sigma$$

El cálculo de los límites del gráfico de recorridos se hace de la manera siguiente:

$$LCS = (d_2 + 3d_3)\sigma = D_2\sigma$$



$$LC = d_2\sigma$$

$$LCS = (d_2 + 3d_3)\sigma = D_1\sigma$$

ii) Caso  $\mu, \sigma$  desconocidos.

Si alguno de los dos fuera conocido sería un híbrido de los dos casos i) y ii). Puesto que en este caso no se tiene ningún conocimiento previo, es preciso estimar  $\mu$  a partir de la media de las medias ( $\bar{\bar{x}}$ ) y  $\sigma$  a partir del recorrido medio ( $\bar{R}$ ) de  $k$  (por ejemplo  $k = 25$ ) muestras iniciales.

A partir de  $\bar{\bar{x}}$  y  $\bar{R}$  se trazarían los límites provisionales de la manera siguiente. En el gráfico de medias:

$$LCS = \bar{\bar{x}} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2} \frac{1}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}$$

$$LC = \bar{\bar{x}}$$

$$LCI = \bar{\bar{x}} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2} \frac{1}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}$$

y los límites del gráfico de recorridos serían:

$$LCS = \left(1 + 3 \frac{d_3}{d_2}\right) \bar{R} = D_4\bar{R}$$

$$LC = \bar{R}$$

$$LCI = \left(1 - 3 \frac{d_3}{d_2}\right) \bar{R} = D_3\bar{R}$$

Una vez establecidos los límites de control provisionales para ambos gráficos, se comprobaría si alguna de las muestras está fuera de los límites. En caso afirmativo se procedería a buscar la causa asignable que pudiera explicar esa anomalía y se recalcularía los límites. Estos límites deben recalcularse periódicamente, por ejemplo, cada 25 muestras.

## CONSTRUCCIÓN DEL GRÁFICO $\bar{x} - s$

i) Caso  $\mu, \sigma$  conocidos.

Si  $\mu$  y  $\sigma$  son conocidos entonces la construcción del gráfico de medias es análoga al caso anterior:

$$LCS = \mu + \frac{3}{\sqrt{n}}\sigma = \mu + A\sigma$$

$$LC = \mu$$

$$LCI = \mu - \frac{3}{\sqrt{n}}\sigma = \mu - A\sigma$$

Cuando se utiliza  $s$ , el gráfico  $S$  se construye

$$LSC = \left( c_2 + 3 \sqrt{1 - c_2^2 - \frac{1}{n}} \right) \sigma = B_2 \sigma$$

$$LC = c_2 \sigma$$

$$LIC = \left( c_2 - 3 \sqrt{1 - c_2^2 - \frac{1}{n}} \right) \sigma = B_1 \sigma$$

y los límites del gráfico de recorridos serían:

$$LSC = \left( c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2} \right) \sigma = B_6 \sigma$$

$$LC = c_4 \sigma$$

$$LIC = \left( c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2} \right) \sigma = B_5 \sigma$$

ii) Caso  $\mu, \sigma$  desconocidos.

(Si alguno de los dos fuera conocido sería un híbrido de los dos casos i) y ii)). Se estimaría  $\mu$  a partir de la media de las medias ( $\bar{\bar{x}}$ ) y  $\sigma$  a partir de la desviación típica muestral media ( $\bar{s}$  o  $\bar{s}^*$ ) de  $k$  muestras iniciales.

A partir de  $\bar{\bar{x}}$  y  $\bar{s}$  o  $\bar{s}^*$  se trazarían los límites provisionales de la manera siguiente. En el gráfico de medias si se utiliza  $s$ :

$$LCS = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{c_2} \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{S} = \bar{\bar{X}} + B_4 \bar{S}$$

$$LC = \bar{\bar{X}}$$

$$LCI = \left( c_2 - 3 \sqrt{1 - c_2^2 - \frac{1}{n}} \right) \frac{\bar{S}}{c_2} B_3 \bar{S}$$

Si se utiliza  $\bar{s}^*$ :

$$LCS = \left( 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \right) \bar{S}^* = B_4 \bar{S}^*$$

$$LC = \bar{S}^*$$

$$LCS = \left( 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \right) \bar{S}^* = B_3 \bar{S}^*$$

Una vez trazados los límites provisionales, se estudiarían los puntos fuera de control y se recalcularía los límites de manera análoga al caso anterior. En las tablas siguientes se resume lo anterior:

Gráficos de medias			
Datos conocidos	LCS	LC	LCI
$\mu$ y $\sigma$	$\mu + A\sigma$	$\mu$	$\mu - A\sigma$
$\sigma$	$\bar{\bar{X}} + A\sigma$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} - A\sigma$
$\mu$	$\mu + A_1 \bar{S}$	$\mu$	$\mu - A_1 \bar{S}$
	$\mu + A_2 \bar{R}$	$\mu$	$\mu - A_2 \bar{R}$
	$\mu + A_3 \bar{S}^*$	$\mu$	$\mu - A_3 \bar{S}^*$
Ninguno	$\bar{\bar{X}} + A_1 \bar{S}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} - A_1 \bar{S}$
	$\bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}$
	$\bar{\bar{X}} + A_3 \bar{S}^*$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} - A_3 \bar{S}^*$



$$\begin{aligned}
 B_5 &= c_4 - 3\sqrt{(1 - c_4^2)} & D_4 &= 1 + \frac{3d_3}{d_2} \\
 B_6 &= c_4 + 3\sqrt{(1 - c_4^2)}
 \end{aligned}$$

### Ejemplo 3: Construcción de un gráfico de Shewart

La galga de los platinos es una característica clave para su buen funcionamiento. La tabla siguiente recoge medidas de 20 muestras de tamaño

5. Construir los gráficos de control  $\bar{X} - R$ ,  $\bar{X} - S$  y  $\bar{X} - S^*$

0,0061	0,0084	0,0076	0,0076	0,0044
0,0088	0,0083	0,0076	0,0074	0,0059
0,0080	0,0080	0,0094	0,0075	0,0070
0,0067	0,0076	0,0064	0,0071	0,0088
0,0087	0,0084	0,0088	0,0094	0,0086
0,0071	0,0052	0,0072	0,0088	0,0052
0,0078	0,0089	0,0087	0,0065	0,0068
0,0087	0,0094	0,0086	0,0073	0,0071
0,0074	0,0081	0,0086	0,0083	0,0087
0,0081	0,0065	0,0075	0,0089	0,0097
0,0078	0,0098	0,0081	0,0062	0,0084
0,0089	0,0090	0,0079	0,0087	0,0090
0,0087	0,0075	0,0089	0,0076	0,0081
0,0084	0,0083	0,0072	0,0100	0,0069
0,0074	0,0091	0,0083	0,0078	0,0077
0,0069	0,0093	0,0064	0,0060	0,0064
0,0077	0,0089	0,0091	0,0068	0,0094
0,0089	0,0081	0,0073	0,0091	0,0079
0,0081	0,0090	0,0086	0,0087	0,0080
0,0074	0,0084	0,0092	0,0074	0,0103

Tabla 4

**SOLUCIÓN:**

Dispongamos los cálculos en la tabla siguiente:

MUESTR A	1	2	3	4	5	Madi a	R	s'	s
1	0,00 6	0,00 8	0,00 8	0,00 8	0,004	0,00 7	0,00 4	0,001 6	0,001 4
2	0,00 9	0,00 8	0,00 8	0,00 7	0,006	0,00 8	0,00 3	0,001 6	0,001 4
3	0,00 8	0,00 8	0,00 9	0,00 8	0,007	0,00 8	0,00 2	0,000 9	0,000 8
4	0,00 7	0,00 8	0,00 6	0,00 7	0,009	0,00 7	0,00 2	0,000 9	0,000 8
5	0,00 9	0,00 8	0,00 9	0,00 9	0,009	0,00 9	0,00 1	0,000 4	0,000 3
6	0,00 7	0,00 5	0,00 7	0,00 9	0,005	0,00 7	0,00 4	0,001 5	0,001 4
7	0,00 8	0,00 9	0,00 9	0,00 7	0,007	0,00 8	0,00 2	0,001 1	0,001 0
8	0,00 9	0,00 9	0,00 9	0,00 7	0,007	0,00 8	0,00 2	0,001 0	0,000 9
9	0,00 7	0,00 8	0,00 9	0,00 8	0,009	0,00 8	0,00 1	0,000 5	0,000 5
10	0,00 8	0,00 7	0,00 8	0,00 9	0,010	0,00 8	0,00 3	0,001 2	0,001 1
11	0,00 8	0,01 0	0,00 8	0,00 6	0,008	0,00 8	0,00 4	0,001 3	0,001 2
12	0,00 9	0,00 9	0,00 8	0,00 9	0,009	0,00 9	0,00 1	0,000 5	0,000 4
13	0,00 9	0,00 8	0,00 9	0,00 8	0,008	0,00 8	0,00 1	0,000 6	0,000 6
14	0,00 8	0,00 8	0,00 7	0,01 0	0,007	0,00 8	0,00 3	0,001 2	0,001 1
15	0,00 7	0,00 9	0,00 8	0,00 8	0,008	0,00 8	0,00 2	0,000 7	0,000 6
16	0,00 7	0,00 9	0,00 6	0,00 6	0,006	0,00 7	0,00 3	0,001 3	0,001 2

17	0,00 8	0,00 9	0,00 9	0,00 7	0,009	0,00 8	0,00 3	0,001 1	0,001 0
18	0,00 9	0,00 8	0,00 7	0,00 9	0,008	0,00 8	0,00 2	0,000 7	0,000 7
19	0,00 8	0,00 9	0,00 9	0,00 9	0,008	0,00 8	0,00 1	0,000 4	0,000 4
20	0,00 7	0,00 8	0,00 9	0,00 7	0,010	0,00 9	0,00 3	0,001 2	0,001 1
					Media	0,00 8	0,00 2	0,001 0	0,000 9

Tabla  
5

**Métodos recorridos:**  $A_2 = 0,577$     $D_3 = 0$     $D_4 = 2,115$

Gráfico de medias:

$$LCS = 0,008 + 0,577 \times 0,002 = 0,0094$$

$$LC = 0,008$$

$$LCI = 0,008 - 0,577 \times 0,002 = 0,0066$$

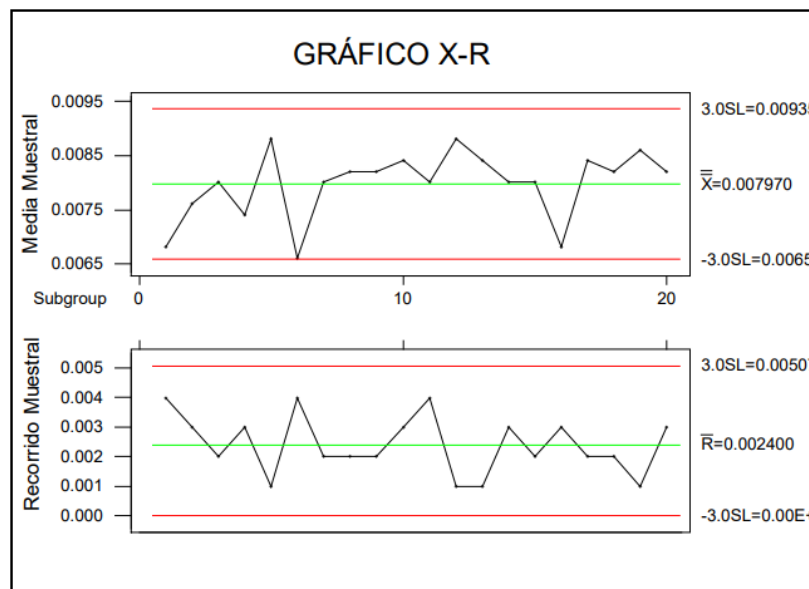
Gráfico de recorridos:

$$LCS = 2,115 \times 0,002 = 0,005$$

$$LC = 0,002$$

$$LCI = 0,000 \times 0,008 = 0,000$$

En las figuras siguientes se representan el gráfico de medias y el de recorridos.



## Figura 11 Gráfico X-R

*Métodos \* A3 = 1,427 B3 = 0 B4 = 2,089*

*Gráfico de medias:*

$$LCS = 0,008 + 1,427 \times 0,0024 = 0,0114$$

$$LC = 0,008$$

$$LCI = 0,008 - 1,427 \times 0,0024 = 0,0045$$

*Gráficos \**

$$LCS = 2,089 \times 0,0010 = 0,0020$$

$$LC = 0,0010$$

$$LCI = 0,000 \times 0,0010 = 0,0000$$

*Método s A1 = 1,596 B3 = 0 B4 = 2,089*

*Gráfico de medias:*

$$LCS = 0,008 + 1,596 \times 0,0009 = 0,0093$$

$$LC = 0,008 \quad LCI = 0,008 - 1,596 \times 0,0009 = 0,0066$$

*Gráficos*

$$LCS = 2,089 \times 0,0009 = 0,0018$$

$$LC = 0,0009$$

$$LCI = 0,000 \times 0,0009 = 0,0000$$