ACTIVIDAD: SOLUCIONES A ACTIVIDAD DE DISTRIBUCIONES NORMALES

A continuación, se presentan las respuestas a la actividad anterior:

1) Los salarios mensuales de los recién graduados que acceden a su primer empleo se distribuyen según una ley normal de media 1300 € y desviación típica de 600 €. Calcular el porcentaje de graduados que cobran:

a) Menos de 600 € al mes
b) Entre 1000 y 1500 € al mes
c) Más de 2200 € al mes

Solución:

- x: variable aleatoria "salarios mensuales en euros, de los recién graduados en su primer empleo"
- La distribución de la variable x es N(1300, 600); μ=1300; σ=600
- Hay que tipificar la variable para obtener las probabilidades a partir de la tabla N(0,1).

a) $\mathrm{P}(x < 600) = \mathrm{P}\left(\mathrm{z} < \frac{600-1300}{600}\right) = \mathrm{P}(\mathrm{z} < -1{,}17) = 1 - 0{,}8790 = 0{,}1210$

Por tanto, el 12,1% de los recién graduados cobra menos de 600 € al mes en su primer trabajo.

b) $\mathrm{P}(1000 < x \leq 1500) = \mathrm{P}\left(\frac{1000-1300}{600} < \mathrm{z} < \frac{1500-1300}{600}\right) = \mathrm{P}(-0{,}5 < \mathrm{z} \leq 0{,}33) =$

$= \mathrm{P}(\mathrm{z} < 0{,}33) - [1 - \mathrm{P}(\mathrm{z} > 1{,}5)] = 0{,}6293 - (1 - 0{,}6915) = 0{,}3208$

Por tanto, el 32,08% de los recién graduados cobra entre 1000 y 1500 € al mes en su primer trabajo.

c) $\mathrm{P}(x > 2200) = \mathrm{P}\left(\mathrm{z} > \frac{2200-1300}{600}\right) = \mathrm{P}(\mathrm{z} > 1{,}5) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{z} \leq 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

Por tanto, el 6,68% de los recién graduados cobra más de 2200 € al mes en su primer trabajo.

2) Se estima que el tiempo que en horas que se necesita para memorizar un tema de Historia de la Filosofía es una variable aleatoria norma, cuya media y varianza se desconocen.
3) Calcular la media y desviación típica de esta distribución de esta distribución si se sabe que las tres cuartas partes de las estudiantes necesitan más de 3 horas y que el 5% necesita más de 6 horas para memorizarlo.

Solución:

- x: variable aleatoria "tiempo, en horas, necesario para memorizar un tema de Historia de la Filosofía".
- La distribución de la variable x en $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, siendo ambos parámetros desconocidos.
- Las tres cuartas partes de las estudiantes necesitan más de 3 horas→ $\mathrm{P}(\mathrm{x} > 3) = 0{,}75$
- El 5% necesita más de 6 horas → $\mathrm{P}(\mathrm{x} > 6) = 0{,}05$

-Tipificando ambas expresiones:

- $\mathrm{P}(\mathrm{x} > 3) = 0{,}75 \rightarrow \ \mathrm{P}\left(\mathrm{z} > \frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75 \Rightarrow \mathrm{P}\left(\mathrm{z} \leq \frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$
- $\mathrm{P}(\mathrm{x} > 6) = 0{,}05 \rightarrow \ \mathrm{P}\left(\mathrm{z} > \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}05 \Rightarrow \mathrm{P}\left(\mathrm{z} \leq \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

-Buscamos en la tabla N(0,1) los valores hallados:

- $0{,}25$ no está en la tabla, equivale a $0{,}75 \rightarrow 0{,}75$ está entre $0{,}7486$ y $0{,}7517$ → le corresponde $-0{,}675$ (hay que cambiar el signo)
- 0,95 está entre $0{,}9495$ y $0{,}905$ → le corresponde $1{,}645$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7357	0,7357	0,7389	0,7422	0,7422	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7642	0,7673	0,7673	0,7703	0,7734	0,7734	0,7794	0,7823	0,7852

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
0,6	0,9452	0,9436	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
0,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9608	0,9616	0,9633

- Resolviendo el sistema

$\mathrm{P}\left(\mathrm{z} \le \frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}25 \Rightarrow \frac{3-\mu}{\sigma} = -0{,}675$ $\quad \mu - 0{,}675\sigma = 3$

$\rightarrow \quad \rightarrow \quad \underline{\mu = 3{,}8728}$ y $\underline{\sigma = 1{,}2931}$

$\mathrm{P}\left(\mathrm{z} \le \frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{6-\mu}{\sigma} = 1{,}645$ $\quad \mu + 1{,}645\sigma = 6$

4) El tiempo de espera para ser atendida en un cierto establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 121.

Determinar un intervalo de confianza con un nivel del 95% para μ, sabiendo que la media de la muestra es igual a 7 minutos.

Solución:

-x: variable aleatoria “tiempo de espera en minutos”

-La distribución de la variable x en $\mathrm{N}(\mu, 3)$

MUESTRA de tamaño 121
Media muestral: $\bar{x} = 7$ minutos Desviación típica de la muestra

$$\Downarrow$$

POBLACIÓN
Se desconoce la media poblacional μ Desviación típica de la población: $\sigma = 3$

- La muestra es $\mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}}\right) = \mathrm{N}\left(7, \frac{3}{\sqrt{121}}\right)$
- $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \Rightarrow \mathrm{z}_{0{,}025} = 1{,}96$
- Intervalo de confianza para la media:

$$\left(\bar{x} - \mathrm{z}_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}}; \bar{x} + \mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}}\right) = \left(7 - 1{,}96 \cdot \frac{3}{\sqrt{121}}; 7 + 1{,}96 \cdot \frac{3}{\sqrt{121}}\right) = (6{,}5; 7{,}5)$$

Intervalo de confianza para la media: $(6{,}5; 7{,}5)$

5) El tiempo diario que las adultas de una determinada ciudad dedican a actividades deportivas, expresando en minutos, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica σ = 20 minutos.
   a) Para una muestra aleatoria simple de 250 habitantes de esa ciudad se ha obtenido un tiempo medio de dedicación a actividades deportivas de 90 minutos diarios. Calcular un **intervalo de confianza al 90%** para μ
   b) ¿Qué tamaño debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que un minuto con el mismo nivel de confianza del 90%?

Solución:

a) Se deducen datos sobre la distribución de las medias de las muestras.

- La población es $\mathrm{N}(\mu, 20)$
- $n = 250 > 30$ $\Rightarrow$ La muestra es $\mathrm{N}\left(90, \frac{20}{\sqrt{250}}\right)$
-

Nivel de confianza del 90% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow \alpha = 0{,}1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}95$

Buscamos en la tabla el valor de z que deja a la izquierda una probabilidad de $\mathbf{0,90}$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1'645$

Intervalo de confianza para la media:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(90 - 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{250}}; 90 + 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{250}}\right) = (87{,}92; 92{,}08)$$

Intervalo de confianza para la media: $(87{,}92; 92{,}08)$

b) Error máximo admisible: $\mathrm{E} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; Datos: $z_{\alpha/2} \cdot 1'645$; $\sigma = 20$

Se pide n para que el error máximo cometido sea $< 1 \rightarrow \mathrm{E} = 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} < 1 \Rightarrow 32{,}9 < \sqrt{n} \Rightarrow n > 1082{,}41$

El tamaño de la muestra debe de ser de 1083

Referencia:
Matemáticasonline.es (s.f). Recuperado a partir de:
https://www.matematicasonline.es/BachilleratoCCNN/Segundo/ejercicios3/normal.pdf