Prueba de Hipótesis: Definición y Construcción

Una hipótesis estadística es un supuesto asociado a uno o más parámetros de cierta distribución de probabilidad. La hipótesis estadística se conforma de dos partes: una hipótesis nula, denotada como H_0 y una alternativa denotada como H_1.

Hipótesis estadística

Una hipótesis estadística relativa al parámetro θ consiste de dos elementos

$$\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$$
$$\mathcal{H}_1 : \theta \neq \theta_0$$

donde $\mathcal{H}_0$ se denomina hipótesis nula y $\mathcal{H}_1$ hipótesis alternativa. θ_0 corresponde a un valor dado.

Fuente: Valdés, J. R. (2019). Estadística. Notas de clase.

Mediante herramientas estadísticas y con base en la evidencia que aporten los datos muestrales de la población de referencia, la hipótesis nula puede o no ser rechazada; si es rechazada se opta por la alternativa.

El planteamiento de una hipótesis debe cumplir ciertos criterios para que tenga validez la conclusión, una vez que se emita un juicio acerca de rechazar o no la hipótesis nula:

Criterios en una hipótesis estadística

- Está asociada a parámetros y no a estimadores o valores fijos;
- los conjuntos a los que pertenece el parámetro θ en las hipótesis nula y alternativa deben ser complementarios;
- la desigualdad estricta va asociada a la hipótesis alternativa $(\neq, <, >)$;
- la prueba de una hipótesis se hace tomando como referencia la hipótesis nula, la cual puede o no ser rechazada.

Fuente: Valdés, J. R. (2019). Estadística. Notas de clase.

Dependiendo de la hipótesis alternativa, la prueba se clasifica como de una cola (izquierda <, derecha >) o de dos colas (≠). Además, se establece un nivel de confianza denotado como $1 - \alpha$, de tal manera que el valor de α es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando no debía hacerse, también denominado *error tipo II*.

Para probar una hipótesis estadística se requieren seis pasos si se cuenta con un contexto de referencia.

Pasos para probar una hipótesis estadística

1. Contar con una hipótesis contextual;
2. generar la hipótesis estadística;
3. seleccionar un estadístico de prueba;
4. determinar la región de significancia γ que corresponde a la zona de rechazo de la hipótesis nula;
5. derivar una conclusión estadística;
6. obtener una conclusión contextual.

Fuente: Valdés, J. R. (2019). Estadística. Notas de clase.

Si directamente se cuenta con una hipótesis estadística, el proceso de prueba consiste en los pasos 2 a 5.

Para garantizar la consistencia matemática y en el contexto de aplicación de la decisión tomada es fundamental un correcto planteamiento. Los siguientes casos son ejemplos de hipótesis mal planteadas:

- La desigualdad estricta debe estar en la hipótesis alternativa.

$$H_0: \vartheta \neq \vartheta_0$$
$$H_1: \vartheta = \vartheta_0$$

- No son complementarias las hipótesis dado que falta el signo de igual.

$$H_0: \vartheta < \vartheta_0$$
$$H_1: \vartheta > \vartheta_0$$

- Las hipótesis deben ser en referencia a un parámetro (θ) y no a un estimador $(\hat{\theta})$.

$$H_0: \hat{\vartheta} = \vartheta_0$$
$$H_1: \hat{\vartheta} \neq \vartheta_0$$

- La hipótesis debe ser en relación a un parámetro(θ) y no a un valor fijo de dicho parámetro (θ_0).

$$H_0: \vartheta_0 = w$$
$$H_1: \vartheta_0 \neq w$$

- No hay consistencia entre las hipótesis ya que cada una se refiere a un parámetro distinto.

$$H_0: \vartheta_0 = \vartheta_0$$
$$H_1: \gamma \neq \gamma 0$$

Ejemplo 1 . *Un proceso de maquinado produce un promedio de 3% de piezas defectuosas. Usted está interesado en demostrar que un simple ajuste en una máquina reducirá p, la proporción de piezas defectuosas producidas en el proceso de maquinado. Entonces, la hipótesis alternativa es*

$$H1: p < 0.03$$

y la hipótesis nula es

$$H0: p = 0.03$$

Si puede rechazar H0, se puede concluir que el proceso ajustado produce menos de 3% de piezas defectuosas.

El estadístico de prueba que se asocia a una prueba de hipótesis es una parte fundamental, ya que este determina la distribución de probabilidad y la región de confianza (significancia) para decidir si se rechaza o no la hipótesis nula.

Para mostrar la manera en que se determina un estadístico de prueba consideremos el problema de determinar si una moneda es *honesta* (Una moneda se considera honesta, desde una perspectiva de probabilidad, si ambas caras tienen la misma probabilidad de ocurrir al lanzarla) o no. La hipótesis nula deriva del supuesto de que la moneda es honesta, esto es, que la probabilidad de que ocurra águila (sol) es 0.5.

Ejemplo 2. *Una moneda se dice que es honesta (en el sentido de probabilidad), si al lanzarla ambas caras tiene la misma probabilidad de quedar hacia arriba. Si p es la probabilidad (teórica) de que ocurra águila (sol) entonces* $p = 0.5$.

Una moneda se asume honesta. Para probar este supuesto se lanza $n = 300$ *veces, de las cuales se obtienen* $x = 160$ *águilas. Entonces:*

1. ***hipótesis contextual:*** *La moneda es honesta;*
2. ***hipótesis estadística:***

$$H_0: p = 0.5$$
$$H_1: p \neq 0.5$$

3. ***Estadístico de prueba:*** *Dado que*

$$\hat{p} = \frac{160}{300} = 0.5333$$

$y\ \ p_0 = 0.5, entonces$

$$\begin{aligned} z &= \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \\ &= \frac{0.5333 - 0.5}{\sqrt{\frac{(0.5)(1-0.5)}{300}}} \\ &= 1.1547 \end{aligned}$$

4. ***Región γ:*** *Dado que* H_1: *$p \neq 0.5$, entonces la prueba es de dos colas. La distribución de probabilidad de referencia es Z ~ N(0,1). Por tanto, tomando $1 - \alpha = 0.95$, la región γ es*

$$\begin{aligned} \gamma &= (-\infty, Z_{\alpha/2}) \cup (Z_{1-\alpha/2}, \infty) \\ &= (-\infty, Z_{0.025}) \cup (Z_{0.975}, \infty) \\ &= (-\infty, -1.96) \cup (1.96, \infty) \end{aligned}$$

5. ***Conclusión estadística:*** *Dado que $z = 1.1547 \notin \gamma$, no hay evidencia estadística para rechazar* H_0.

6. ***Conclusión contextual:*** *Se considera que la moneda es honesta.*

Referencias:

Hoel, P. G. (1984). Elementary Statistics. John Wiley & Sons.

Valdés, J. R. (2019). Estadística. Notas de clase.