# Movimiento Circular Uniformemente Variado

## MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En alguna ocasión te has preguntado por qué en los juegos mecánicos como el trabant, que la mayoría de las ferias que se instalan en las ciudades lo tienen, las personas que lo utilizan se divierten tanto y esto es gracias a una serie de fuerzas físicas que intervienen en él.

El trabant consiste en una circunferencia en la que las personas se acomodan paradas como si fueran los puntos que conforman la circunferencia y mediante una simple barra se sujetan; el juego comienza a dar vueltas y vueltas, girando y sientes cómo una fuerza te hace que tu espalda se pegue a la pared.

Para analizar el fenómeno, conozcamos primero las características del *movimiento circular*.

- **El cuerpo describe una trayectoria circular**

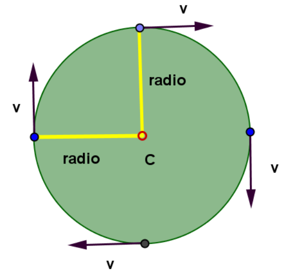
Es decir, es un cuerpo que se desplaza alrededor de un centro fijo, llamado eje de rotación. Por ejemplo, la rueda de la fortuna, poleas, discos, las llantas de un vehículo, un Cd, las hélices, la ruleta, etc.

El movimiento se realiza en un mismo plano y es el movimiento más simple en dos dimensiones. Su trayectoria es una circunferencia de radio r.

# Movimiento Circular Uniformemente Variado

- **La dirección y sentido de la velocidad están cambiando en cada instante, ya que la velocidad es tangente (perpendicular al radio) a la circunferencia.**

"Cuando un cuerpo rígido se pone en rotación, su movimiento generalmente, se describe en referencia al eje alrededor del cual gira, el eje de rotación por lo general está dentro del cuerpo, como en el caso de las llantas de un coche y en otros casos está más allá de sus límites externos (White H. , 1991)"



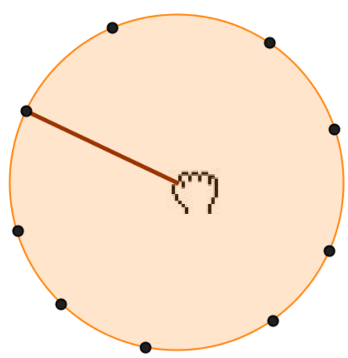

Por ejemplo: Si amarras un objeto (un dije, una piedra, una pelota, etc.) al extremo de un cordel de 40 cm de longitud y comienzas a dar vueltas al cordel, la trayectoria que describe el objeto es una circunferencia. El eje está en el extremo opuesto al de la piedra.

El movimiento circular se clasifica en:

1) MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME:

Características:

- ✓ La trayectoria que describe el cuerpo es una circunferencia
- ✓ Su rapidez es constante y es tangente a la trayectoria



2) MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO

Características:

- ✓ La trayectoria que describe el cuerpo es una circunferencia
- ✓ Su rapidez varía uniformemente y es tangente a la trayectoria.

## MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME:

Como características ya habíamos mencionado que la trayectoria que describe el cuerpo es una circunferencia, su rapidez es constante (se recorren distancias iguales en tiempos iguales) y es tangente a la trayectoria.

Una revolución o ciclo es una vuelta completa a la circunferencia que el objeto recorre.

1 revolución = 360º = $2\pi rad$

"El tiempo que el cuerpo tarda en dar una vuelta o revolución completa se denomina período del movimiento y se representa por la letra T y su modelo matemático es:

$$\boldsymbol{T = \frac{t}{n}}$$

T = período, t = tiempo que tardan, n= número de vueltas, ciclos o revoluciones.

Unidades en las que se expresa en período: segundos, minutos, etc.

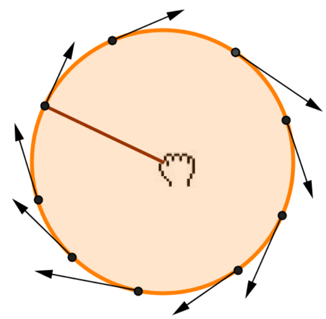
La frecuencia (f) es el número de revoluciones completas que un cuerpo realiza en la unidad de tiempo

**Frecuencia (F) =** $\boldsymbol{\frac{n}{t}}$ , n = número de revoluciones, vueltas t = tiempo

La frecuencia es el inverso del período. F = $\frac{1}{T}$ T = $\frac{1}{F}$

Unidades de frecuencia: Hertz(Hz) (que significa el núm. Vueltas que da el móvil cada segundo)

# Movimiento Circular Uniformemente Variado



Cuando un cuerpo tiene una frecuencia de 18 Hz significa que da 18 vueltas en un segundo.

Cuando un cuerpo tiene una frecuencia de 5 HZ significa que da 5 vueltas en un segundo.

Pero también existe la frecuencia angular (w), es el desplazamiento angular en la unidad de tiempo, ya que en un ciclo o vuelta se recorren 360º, en media vuelta serán 180º. Si recuerdas los ángulos no solamente se miden en grados, también se miden en radianes (rad) por lo que la frecuencia angular tiene sus unidades en rad/seg.

Así, si decimos que un objeto tiene una frecuencia de ½ Hz, quiere decir que recorre media vuelta cada segundo, es decir 180º = $\pi \, radianes$ cada un segundo.

Si el movimiento es uniforme se cumple que: se recorren distancias iguales en tiempos iguales, es decir:

$$dt = distancia\ recorridatiempo\ e\ \ pleado$$

En el movimiento circular la distancia recorrida por un cuerpo o partícula, es la longitud de la circunferencia:

La distancia o espacio(s) recorrido se mide en longitud o en ángulo:

Distancia = $\begin{cases} longitud\ \ (lineal): \ cm,\ metros,\ yd,\ \ in\,, etc. \\ ángular: unidades\ en\ grados\ o\ en\ radianes, o\ revoluciones \end{cases}$

Al sustituir en V = $\frac{d}{t}$ =$\frac{2\pi r}{T}$ pero como $T = \frac{t}{n}$entonces V =$\frac{2\pi r}{\frac{t}{n}}$ = $\frac{2\pi r n}{t}$ y F = $\frac{n}{t}$

por lo que tendremos que:

# Movimiento Circular Uniformemente Variado

$$V = \frac{2\pi r}{T}$$

$$V = 2\pi r f$$

La velocidad lineal o tangencial:

- ✓ Se refiere a la distancia recorrida en la unidad de tiempo.
- ✓ Es un vector constante en magnitud, pero cuya dirección va cambiando por ser siempre tangente al círculo.
- ✓ Sus unidades en el sistema M.K.S m/seg$^2$
- ✓ Depende siempre del valor del radio:
  A mayor radio, mayor distancia
  A menor radio, menor distancia

La velocidad angular:

- ✓ Se representa por $\omega$
- ✓ Se produce cuando un cuerpo con velocidad angular constante describe ángulos iguales en tiempos iguales.
- ✓ Se refiere al ángulo descrito en dicha unidad de tiempo.
- ✓ El vector velocidad mantiene constante su magnitud, pero no su dirección.
- ✓ Proporciona información acerca de la rapidez con la que gira el cuerpo (Alvarenga, 1991).
- ✓ Se conserva tangente a la trayectoria del cuerpo (perpendicular al radio de su trayectoria circular).
- ✓ Sus unidades en el sistema M.K.S radianes/seg.

La velocidad angular($\omega$) es la relación entre el ángulo descrito por el cuerpo y el intervalo de tiempo necesario para describirlo, de tal manera que su ecuación es:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\Delta\theta}}{\boldsymbol{\Delta t}}$$

A mayor $\omega$ entonces gira con mayor rapidez.

Unidades de la velocidad angular: $\frac{°}{seg}$ ó en el sistema internacional (M.K.S) la velocidad angular se mide en radianes/seg.

"Un radián es el ángulo subtendido en el centro del círculo por un arco de igual longitud que el radio del círculo. Así, un ángulo $\theta$ en radianes está dado en términos de la longitud del arco **s** que este subtiende sobre un círculo de radio r por: $\theta = \frac{s}{r}$

La medida en radianes de un ángulo es un número adimensional. Los radianes, como los grados, no son unidad física; el radian no se puede expresar en términos de metros, kilogramos o segundos. No obstante se usará la abreviatura rad para recordar que se está trabajando en radianes (Bueche, Física General, 2001).

1 vuelta completa que realiza el cuerpo = 1 revolución por lo que:

| | |
|---|---|
| 360º | $2\pi rad$ |
| 180º | $\pi rad$ |
| 90º | $\frac{\pi}{2} rad$ |
| 45º | $\frac{\pi}{4} rad$ |
| 30º | $\frac{\pi}{6}$ rad |
| 57.3º | 1 rad |

# Movimiento Circular Uniformemente Variado

Si 1 revolución = $2\pi rad$ y $\Delta t = T$ se obtiene:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi rad}{T}$$

$\boldsymbol{\omega} = \frac{2\pi}{T}$ sus unidades: rad/seg

$\omega = 2\pi f$ sus unidades: $(s^{-1})$

Un movimiento es circular y uniforme cuando el cuerpo describe una trayectoria circular y el módulo de su velocidad angular es constante (Alvarenga, 1991).

**Concluyendo que:**

**$V = \omega r$ Solo es válida si el ángulo está medido en radianes**

Un cuerpo animado con movimiento circular uniforme, su rapidez sí es constante.

Todos los puntos de una rueda que gira con frecuencia constante NO están animados de la misma velocidad tangencial, pues la dirección y sentido de esta varía.

Todos los puntos de una rueda que gira con frecuencia constante SÍ están animados de la misma velocidad angular, pues darán las mismas vueltas en el mismo tiempo.

La velocidad angular de un punto que se mueve con movimiento circular uniforme solo depende de la frecuencia.

Ya habíamos mencionado, en las características, que si la velocidad lineal es un vector constante en magnitud, pero cuya dirección va cambiando por ser siempre tangente al círculo. Si es así, quiere decir que la velocidad no es constante, por lo tanto, al existir un cambio de velocidad, existe aceleración.

# Movimiento Circular Uniformemente Variado

En algunas ocasiones tendrás que realizar conversiones, por ejemplo en las unidades que manejes para s o $\theta$ según sea el caso, por ejemplo, si $\theta$ está expresada en radianes y lo quieres convertir a revoluciones, basta con utilizar el factor de conversión:

$$\text{Número de radianes } \left( \frac{1\, revolución}{2\, \pi\, rad} \right)$$

## Relaciones entre cantidades angulares tangenciales

“Cuando una rueda de radio r gira sobre su propio eje, un punto en el borde de la rueda se puede describir en términos de la distancia circular s que se ha desplazado, su rapidez tangencial v y su aceleración tangencial $a_T$. Estas cantidades están relacionadas con las cantidades angulares. $\theta, \omega\ y\ \alpha$ que describen la rotación de rueda a través de las relaciones:

$$S = r\,\theta \qquad v = r\,\omega a_T = r\,\alpha$$

Ten cuidado de que las medidas sean en radianes para $\theta, \omega\ y\ \alpha$” (Bueche, Física General, 2001)

En el m.c.u. la magnitud de la velocidad del objeto es constante, por lo tanto no existe aceleración tangencial, pero como la dirección del vector velocidad cambia constantemente el objeto posee aceleración centrípeta (Alvarenga, 1991).

Un punto de masa m que se mueve con una rapidez constante v en un círculo de radio r está siendo acelerado. Aunque la magnitud de su velocidad inicial no cambia, la dirección de la velocidad está cambiando continuamente. Este cambio de dirección da origen a una aceleración, llamada aceleración centrípeta de la masa, dirigida hacia el centro del círculo (Bueche, Física General, 2001).

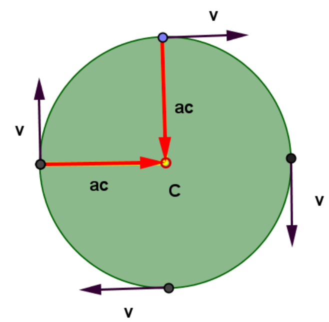
# Movimiento Circular Uniformemente Variado

La aceleración centrípeta tiene la dirección del radio y siempre apunta hacia el centro de la circunferencia (Alvarenga, 1991).

El modelo matemático que lo representa:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

$a_c$= aceleración centrípeta, v=rapidez de la masa en su desplazamiento perimetral en el círculo y r = radio




Y si: $v = r\omega$ y $a_c = \frac{v^2}{r}$ al sustituir se obtiene y $a_c = \frac{r^2\omega^2}{r}$ simplificando será:

$$a_c = r\ \omega^2$$

$\omega$ en radianes/seg.

Es por ello que cuando un coche toma una curva cerrada (con radio pequeño) a alta velocidad, tendrá una aceleración centrípeta muy grande.

La aceleración centrípeta de un cuerpo da lugar a una fuerza dirigida hacia el centro de la trayectoria y que recibe el nombre de fuerza central o fuerza centrípeta.

La fuerza centrípeta (Fc) es la fuerza no balanceada que debe actuar sobre una masa m que se mueve en una trayectoria circular de radio r para proporcionarle una aceleración centrípeta $\frac{v^2}{r}$

Partiendo de F = m x a ( segunda ley del movimiento de Newton)

# Movimiento Circular Uniformemente Variado

$Fc = m \times a_c$ pero $a_c = \frac{v^2}{r}$ al sustituir se obtiene :

$$Fc = \frac{m.v^2}{r}$$

Fc = fuerza centrípeta, m = masa v = rapidez tangencial o lineal, r = radio

Y como $v = r\,\omega$ , al elevar la velocidad la cuadrado se obtiene: $v^2 = r^2\omega^2$ y al sustituir v en Fc:

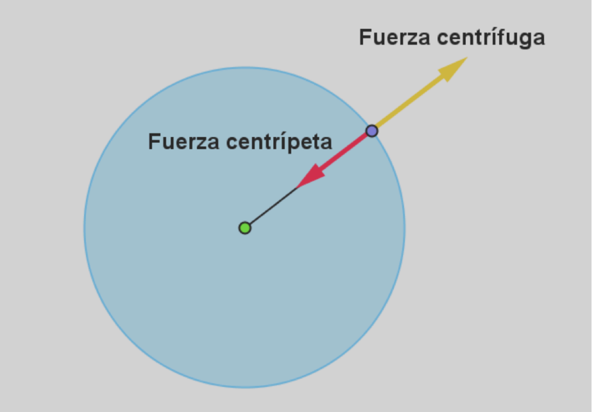
$$Fc = \frac{m.v^2}{r} = \frac{m\,.r^2\omega^2}{r} = mr\omega^2$$

$$FC = mr\omega^2$$

Centrípeta significa que busca el centro o se dirige hacia el centro. La fuerza que mantiene en su sitio a los ocupantes de un juego mecánico giratorio como el trabán o el tiovivo es una fuerza dirigida hacia el centro, la fuerza centrípeta, esta fuerza no es un nuevo tipo de fuerza; es simplemente el nombre que se le da a toda fuerza dirigida en ángulo recto respecto a la trayectoria de un objeto en movimiento y que tiende a producir un movimiento circular. Las fuerzas gravitacionales y eléctricas actúan a través del espacio vacío como fuerza centrípeta. La fuerza gravitacional dirigida hacia el centro de la tierra mantiene a la luna en una órbita circular alrededor de nuestro planeta (Hewitt, 1999).

Según la tercera ley del movimiento de Newton: a toda acción le corresponde una reacción del mismo módulo y dirección, pero sentido contrario; la fuerza dirigida en sentido contrario a la centrípeta recibe el nombre de fuerza centrífuga.

# Movimiento Circular Uniformemente Variado




Si hiciéramos girar una bola pesada atada a una cuerda, el tirón es perpendicular a la velocidad de la bola; este tirón hacia el centro es la fuerza centrípeta. Como resultado de esta fuerza, la velocidad cambia de dirección y se origina una aceleración. Debido a la inercia, la bola ejerce al girar una fuerza hacia afuera sobre la cuerda, la cual se percibe al estar sosteniendo al cuerda; esta es la fuerza centrífuga (fuerza que se aleja del centro). Ambas fuerzas (centrípeta y centrífuga) son iguales en magnitud y dirección pero sentido contrario. Ambas fuerzas no son fuerzas equilibradas, pues actúan en diferentes cuerpos: La fuerza centrípeta actúa sobre la bola, la fuerza centrífuga actúa sobre la cuerda.

## EJEMPLO GUIADO NÚMERO 1

Un cuerpo con desplazamiento circular recorrió 567º; calcula la cantidad de radianes recorridos.

Recuerda la equivalencia: 1 radián = 57.3º

Opción 1)

Utilizando una regla de tres simple tenemos: 1 radián = 57.3º

X = 567º al despejar x se obtiene:

X= $\frac{1\,radián\,(\,567°)}{57.3°}$ $= 9.89\,radines$

Opción 2)

Utilizando la equivalencia como un factor:

567º x $\frac{1\,rad}{57.3°}$ = 9.89 radianes

Opción 3)

567º x $\frac{2\pi rad}{360°}$ = 9.89 radianes

Utiliza el procedimiento que más te guste, aquí solamente te mostramos diferentes opciones de solución.

## EJEMPLO GUIADO NÚMERO 2

Una rueda gira 200 vueltas en 10 segundos. Si el radio de la rueda es de 20 cm, si el mov. es uniforme, calcula:

a) El período
b) La frecuencia
c) La velocidad lineal y angular

| *Datos:* | *Fórmula* | *Sustitución* |
|---|---|---|
| n= 200 ciclos o vueltas | T = $\frac{t}{n}$ | T = $\frac{10\,seg}{200\,v}$ = 0.05 seg |
| t= 10 seg | | |

T = ? F = $\frac{n}{t}$ F= $\frac{200\ v}{10\ seg}$ = 20 revoluciones/seg(rps)

F = ?

V = ?V= $2\pi rf$ v = 2 $\pi$ (0.2 m)(20rev/seg) = 25.1328 m/seg

$\omega$ =? $\omega = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{T}} = \frac{2\pi}{0.05\ seg} rad \omega$= 125.66 rad/seg

r = 0.2 m

## EJEMPLO GUIADO NÚMERO 3

Las llantas de un coche tienen un radio de 0.30 m y giran a 850 revoluciones por minuto. Calcula la velocidad lineal y angular a la que se mueve el borde exterior del neumático si está animado de m.c.u.

*Datos:* *Fórmula* *Sustitución*

R= 0.30 m V= $2\pi rf$ v= 2($\pi$)(0.30m)(14.17 rev/seg)

F= 850 rev/min = 14.17 rev/seg v= 26.70 m/seg

V = ?y como v = $\omega r$ despejando $\omega = \frac{v}{r}$ = $\frac{26.7m\ /seg}{0.30\ m}$ = 89 rad/seg

$$\omega = ?\ \omega = 89\ rad/seg$$

Recuerda que la velocidad lineal o tangencial se expresa en M.k.S en m/seg y la velocidad angular en rad/seg.

### EJEMPLO GUIADO NÚMERO 4

Un deportista corre con rapidez constante en una pista circular de 80m de radio y recorre 5 vueltas en 5.5 minutos, calcula:

a) El período
b) La frecuencia
c) La rapidez de la persona.

| *Datos* | *Fórmula* | *Sustitución* |
|---|---|---|
| V= K | T = $\frac{t}{n}$ | T = $\frac{330\ seg}{5\ v}$ = 66 seg |
| r= 80 m | | |
| n = 5 v | F = $\frac{n}{t}$ | F= $\frac{5\ v}{330\ seg}$ = 0.015 ciclos/seg |
| t= 5.5. min= 330seg | | |
| T= ? | V= $2\pi r f$ | v= 2($\pi$)(80m)(0.015cilos/seg) |
| F =? | | V= 7.53 m/seg |
| v = ? | | |

## EJEMPLO GUIADO NÚMERO 5

Se ata un objeto de 0.92 kg al extremo de una cuerda. Se hace girar horizontalmente de tal manera que el objeto describe una trayectoria circular cuyo radio mide 80 cm a 4 rev/seg, calcula:

a) La velocidad lineal
b) La aceleración centrípeta
c) La fuerza ejercida por la cuerda sobre el cuerpo
d) La fuerza ejercida sobre el cuerpo por la cuerda
e) ¿Cómo será la trayectoria del objeto si la cuerda se rompe al estar girando?

*Datos* | *Fórmula* | *sustitución*

m= 0.92 kg | a) v= $2\pi rf$ | V= $2(\pi)$ (0.8m)(4rev/seg)

r= 0.8 m | | v= 20.10 m/seg

f= 4 rev/seg

b) $a_c = \frac{v^2}{r}$ $a_c = \frac{(20.10\text{m/seg})^2}{0.8m} = \frac{404.01\ m^2/seg^2}{0.8\ m}$

$a_c$= 505.01 m/seg$^2$

c) $Fc = \frac{m.v^2}{r}$ $Fc = \frac{(0.92kg).(20.10\frac{m}{seg}^2)}{0.8m} = \frac{371.69N.m}{0.8m} =$

**Fuerza centrípeta: Fc = 464.61 N**

d) La fuerza ejercida sobre el cuerpo por la cuerda

Fuerza Centrípeta = Fuerza centrífuga pero en sentido contrario

e) Si la cuerda, se rompe la bola saldrá con una dirección perpendicular al eje de rotación. Adquiere movimiento rectilíneo tangente a la circunferencia, se mueve en una línea recta tangente a su trayectoria circular, no hacia afuera respecto al centro de la misma.