Operaciones con Fracciones que Incluyen Polinomios

Una fracción algebraica que incluye polinomios, es una expresión fraccionaria donde el denominador y numerador son polinomios, por ejemplo:

$$\frac{(x+y)(x-y)}{2y+3z}, \quad \frac{3a^3b^2c+y^2+w^4}{7df^5+6g^3+2h^7+2}, \quad \frac{\sqrt{3}ar+1}{z^5y+4}, \quad \frac{2x^2+y^3}{3x^3z+a^2+b+c^7}, etc.$$

SIMPLIFICACIÓN

Las fracciones algebraicas que incluyen polinomios se simplifican dividiendo el numerador y denominador por factores comunes. Para simplificar al máximo, debemos factorizar tanto el numerador como el denominador de la fracción algebraica. Luego, se eliminan aquellos factores que tengan en común el numerador y denominador de la fracción a simplificar.

Ejemplo 1. Simplificar la fracción algebraica $\frac{(x^2-1)}{2x^2+2x}$.

- Numerador de la fracción a simplificar: (x^2-1)
- Denominador de la fracción a simplificar: $2x^2+2x$

Lo primero que se hace para simplificar la fracción, es factorizar tanto numerador como denominador.

- Numerador: (x^2-1)

Recordando la lección de productos notables, se observa que el numerador es una diferencia de cuadrados y se factoriza de la siguiente manera:

$$(x^2-1) = (x+1)(x-1)$$

Ahora, factoricemos el denominador.

- Denominador: $2x^2+2x$

Observa que el denominador se puede factorizar con factor común, el cual es $2x$.

- La factorización del denominador es la siguiente:

$$2x^2 + 2x = 2x(x + 1)$$

Reescribiendo la fracción a simplificar, con las respectivas factorizaciones del numerador y denominador, se tiene:

$$\frac{(x^2 - 1)}{2x^2 + 2x} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{2x(x + 1)}$$

Luego se eliminan los factores comunes, que son aquellos que aparecen tanto en el denominador como en el numerador. Como $(x + 1)$ aparece en el numerador y en el denominador de la fracción, se simplifica a 1 y ya no se escribe en la fracción resultante. Por lo tanto, la simplificación es:

$$\frac{(x^2 - 1)}{2x^2 + 2x} = \frac{(x - 1)}{2x}$$

Ejemplo 2. Simplificar la fracción algebraica $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$.

- Numerador de la fracción a simplificar: $x^2 - 5x + 6$
- Denominador de la fracción a simplificar: $x^2 - 7x + 12$

Lo primero que se hace para simplificar la fracción es factorizar, tanto numerador, como denominador.

- Numerador: $x^2 - 5x + 6$

De nuevo utilizando la lección de productos notables, se observa que el numerador es un trinomio de segundo grado y se factoriza de la siguiente manera:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Ahora, factoricemos el denominador que es un trinomio de segundo grado.

- Denominador: $x^2 - 7x + 12$
- La factorización del denominador es la siguiente:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3)$$

Reescribiendo la fracción a simplificar, con las respectivas factorizaciones del numerador y denominador, se tiene:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 4)(x - 3)}$$

Luego se eliminan los factores comunes, que son aquellos que aparecen tanto en el denominador como en el numerador. Como $(x - 3)$ aparece en el numerador y en el denominador de la fracción, se simplifica a 1 y ya no se escribe en la fracción resultante. Por lo tanto, la simplificación es:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(x - 2)}{(x - 4)}$$

Ejemplo 3. Simplificar la fracción algebraica $\frac{x-2}{x^2-4}$.

- Numerador de la fracción a simplificar: $x - 2$
- Denominador de la fracción a simplificar: $x^2 - 4$

Lo primero que se hace para simplificar la fracción, es factorizar tanto numerador como denominador.

- Numerador: $x - 2$

El numerador ya está simplificado, por lo tanto, lo dejaremos tal y como esta.

Ahora, factoricemos el denominador.

- Denominador: $x^2 - 4$

Observa que el denominador es una diferencia de cuadrados.

- La factorización del denominador es la siguiente:
$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

Reescribiendo la fracción a simplificar, con las respectivas factorizaciones del numerador y denominador, se tiene:

$$\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$$

Luego se eliminan los factores comunes, que son aquellos que aparecen tanto en el denominador como en el numerador. Como $(x-2)$ aparece en el numerador y en el denominador de la fracción, se simplifica a 1 y ya no se escribe en la fracción resultante. Por lo tanto, la simplificación es:

$$\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{(x+2)}$$

Ejemplo 4. Simplificar la fracción algebraica $\frac{6x^3}{2x^2+2x^3}$

Lo primero que se hace para simplificar la fracción es factorizar, tanto numerador, como denominador.

- Numerador: $6x^3$
- El numerador se puede expresar como: $3 \cdot 2 \cdot x \cdot x^2$

Ahora, factoricemos el denominador.

- Denominador: $2x^2 + 2x^3$

Observa que el denominador se puede factorizar utilizando el término común

$$2x^2.$$

- La factorización del denominador es la siguiente:

$$2x^2 + 2x^3 = 2x^2(1 + x)$$

Reescribiendo la fracción a simplificar, con las respectivas factorizaciones del numerador y denominador, se tiene:

$$\frac{6x^3}{2x^2 + 2x^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot x \cdot x^2}{2x^2(1 + x)}$$

Luego se eliminan los factores comunes, que son aquellos que aparecen tanto en el denominador como en el numerador. Como x^2 y 2 aparecen en el numerador y en el denominador de la fracción, se simplifica a 1 y ya no se escribe en la fracción resultante. Por lo tanto, la simplificación es:

$$\frac{6x^3}{2x^2 + 2x^3} = \frac{3x}{(1 + x)}$$