Racionalización de Expresiones con Radicales

Cuando una fracción tiene en su denominador alguna expresión con radical, conviene obtener fracciones equivalentes que no tengan expresiones con radicales en el denominador. A este proceso se le llama racionalización de radicales de los denominadores.

Según el tipo de expresión con radical que aparece en el denominador de la fracción, el proceso es diferente.

- **Cuando el denominador es un monomio.**

Es cuando el denominador contiene una sola expresión con índice y radicando cualesquiera.

$$\frac{x}{\sqrt[n]{y^m}}$$

Donde $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son variables o números cualesquiera, $\boldsymbol{m}$ es el exponente del radicando y $\boldsymbol{n}$ es el índice del radical.

Lo que se hace para racionalizar es lo siguiente: se multiplica tanto numerador como denominador por $\sqrt[n]{y^{n-m}}$.

$$\underset{\boxed{1}}{\frac{x}{\sqrt[n]{y^m}}} = \underset{\boxed{2}}{\frac{x\sqrt[n]{y^{n-m}}}{\sqrt[n]{y^m}\cdot\sqrt[n]{y^{n-m}}}} = \underset{\boxed{3}}{\frac{x\sqrt[n]{y^{n-m}}}{\sqrt[n]{y^m\cdot y^{n-m}}}} = \underset{\boxed{4}}{\frac{x\sqrt[n]{y^{n-m}}}{\sqrt[n]{y^n}}} = \frac{x\sqrt[n]{y^{n-m}}}{y}$$

Racionalización de Expresiones con Radicales

En el recuadro anterior tenemos una fracción con una expresión radical en el denominador; por lo tanto, se racionaliza la fracción en los pasos $1, 2, 3$ y 4.

En el paso número 1, se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{y^{n-m}}$

En el paso número 2, se aplica la ley de raíz de un producto de los radicales en el denominador.

En el paso número 3, se aplica la primera ley de los exponentes al radicando del denominador.

En el paso 4, se aplica la ley de conversión de un radical a exponente fraccionario.

Veamos dos ejemplos:

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[8]{a^{8-7}}$

$$\frac{2}{\sqrt[8]{a^7}} = \frac{2\cdot\sqrt[8]{a^{8-7}}}{\sqrt[8]{a^7}\cdot\sqrt[8]{a^{8-7}}} = \frac{2\cdot\sqrt[8]{a^{8-7}}}{\sqrt[8]{a^7\cdot a^{8-7}}} = \frac{2\cdot\sqrt[8]{a^{8-7}}}{\sqrt[8]{a^8}} = \frac{2\cdot\sqrt[8]{a^{8-7}}}{a}$$

Aplicamos la ley de los radicales: raíz de un producto

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{6}$

$$\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Cuando en el denominador de la fracción existe alguna raíz cuadrada, para racionalizar, solamente multiplicamos tanto el numerador y denominador de la fracción por esa misma raíz cuadrada.

Racionalización de Expresiones con Radicales

- **Cuando el denominador es un polinomio.**

Es cuando el denominador contiene más de una expresión en el denominador y al menos una de ellas es una expresión con radical. Por ejemplo:

$$1)\ \frac{x}{\sqrt{y}+\sqrt{z}} \qquad\qquad 2)\ \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$$

En este caso debemos tomar en cuenta dos aspectos importantes: conocer lo que es una expresión conjugada y productos notables.

Para racionalizar el primer ejemplo: siempre que aparezca una raíz cuadrada en el denominador, se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador. En este caso, el denominador es un binomio y el conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado.

Algunos ejemplos de binomios y sus conjugados.

$a+b \rightarrow$ Su conjugado es $a-b$

$-z-y \rightarrow$ Su conjugado es $-z+y$

$\sqrt{a}+\sqrt{b} \rightarrow$ Su conjugado es $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Ahora te preguntarás, ¿por qué hay que multiplicar por el conjugado del denominador?

El objetivo de racionalizar es quitar la raíz del denominador y si multiplicamos el denominador de la fracción por su conjugado, observa lo que pasa:

El denominador de la fracción es: $(\sqrt{y}+\sqrt{z})$.

Su conjugado es: $(\sqrt{y}-\sqrt{z})$

Multipliquemos el denominador por su conjugado:

$(\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{y}-\sqrt{z}) =$

¿Esta multiplicación te parece familiar? Recuerda la lección de productos notables y, efectivamente, esta multiplicación recibe el nombre de "producto de la suma por la diferencia de dos cantidades".

Por lo tanto el resultado es:

$$(\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{y}-\sqrt{z}) = (\sqrt{y})^2 - (\sqrt{z})^2 = (y^{\frac{1}{2}})^2 - (z^{\frac{1}{2}})^2 = y - z$$

Y ya logramos quitar las raíces del denominador.

Regresando a la fracción a racionalizar:

$$\frac{x}{\sqrt{y}+\sqrt{z}} = \frac{x(\sqrt{y}+\sqrt{z})}{(\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{y}-\sqrt{z})} = \frac{x\sqrt{y}+z\sqrt{z}}{y-z}$$

Siempre que observes en el denominador de una fracción un binomio con al menos una raíz cuadrada, multiplica el denominador por su conjugado para racionalizarla.

Pasemos ahora a racionalizar el segundo ejemplo.

$$2)\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$$

Como puedes observar, en el denominador de la fracción ya no aparecen raíces cuadradas, sino raíces cúbicas, ¿cómo quitaremos las raíces del denominador? ¿Ahora por quien multiplicaremos el numerador y denominador de la fracción para poder racionalizarla? Vuelve a recordar tus lecciones de productos notables.

Tomando este producto notable: $x-y=\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$ es fácil quitar las raíces cúbicas del denominador; así que multipliquemos numerador y denominador de la fracción por el segundo factor $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}=\frac{1\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$$

Y así logramos racionalizar la fracción. Como te has dado cuenta, los productos notables son de mucha utilidad para racionalizar fracciones.

Veamos otro ejemplo.

Observa la siguiente fracción:

$$\frac{qr^2}{s^2+\sqrt{u}}$$

Tenemos que racionalizarla, porque en el denominador aparece al menos una expresión con radical ($\sqrt{u}$).

Lo que debes hacer es multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador.

El denominador es: $s^2+\sqrt{u}$

Por lo tanto el conjugado del denominador es: $s^2 - \sqrt{u}$

$$\frac{qr^2}{s^2 + \sqrt{u}} = \frac{qr^2(s^2 - \sqrt{u})}{(s^2 + \sqrt{u})(s^2 - \sqrt{u})} = \frac{qr^2(s^2 - \sqrt{u})}{s^4 - u}$$

En conclusión, para racionalizar una fracción, debemos multiplicar tanto el denominador como el numerador por algún factor que haga simplificar el denominador y desaparezcan las raíces. No importa si en el numerador siguen apareciendo las raíces, lo importante es que en el denominador no las haya. El papel de los productos notables es muy importante, porque nos permite saber por cuál factor tenemos que multiplicar la fracción para hacer desaparecer las raíces del denominador.