Ángulos entre dos rectas

Cuando desconocemos si un par de rectas son perpendiculares y lo único que sabemos es que sí se cruzan al realizar la gráfica, podemos medir el ángulo que se forma entre ellas de forma manual usando un transportador, pero este método no es exacto, entonces tenemos el recurso analítico y este es aplicando una fórmula que se obtiene al relacionar las pendientes de ambas rectas y sus inclinaciones respectivas.

Ejemplo 1

Calcule el ángulo que se forma entre el siguiente par de rectas, usando un transportador sobre la gráfica y aplicando la fórmula indicada. Compare los resultados obtenidos.

a) $L_1: (-2, 1)$ y $(4, 5)$
   $L_2: (3, 1)$ y $(-1, 5)$

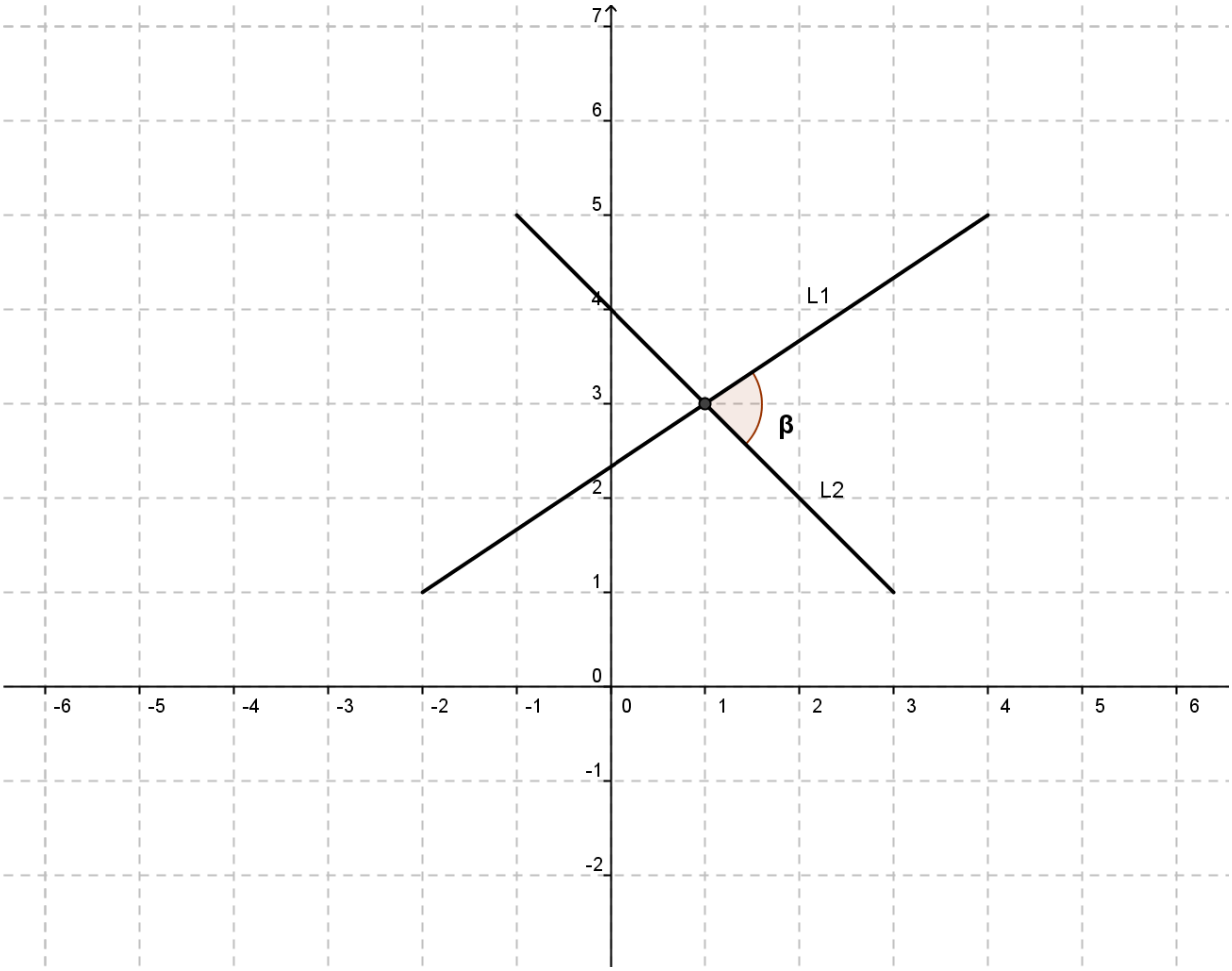
Fórmula:

$$\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1)(m_2)} \qquad \text{con } m_1, m_2 \neq -1$$

Donde m_1 y m_2 son, respectivamente, las pendientes de los lados inicial y final del ángulo formad

Solución

Graficando:



Gráficamente podemos observar que las rectas se cruzan, así que podemos usar:

a) Un transportador y obtenemos la medida del ángulo que es aproximadamente:

$$\beta = 80°$$

b) Aplicando la fórmula dada:

$$\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1)(m_2)}$$

Ángulos entre dos rectas

Si observamos, necesitamos las pendientes de ambas rectas: la recta L_1 en donde inicia el ángulo y la recta L_2 donde termina.

Calculemos las pendientes de ambos segmentos:

$L_1: (2,1), (4,5)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{5-1}{4-(-2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$L_2: (3,1), (-1,5)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_2 = \frac{5-1}{-1-3} = \frac{4}{-4} = -1$$

Aplicando la fórmula para el ángulo entre los dos segmentos:

$$\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1)(m_2)}$$

$$\tan\beta = \frac{-1 - \frac{2}{3}}{1 + (-1)\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$\tan\beta = \frac{-\frac{5}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{-5}{3}}{\frac{1}{3}} = -5$$

$$\beta = \tan^{-1}(-5) = 78.69\,^\circ$$

$$\beta = 78^\circ\, 41'\, 24.24''$$

Si comparamos los resultados de los dos métodos hay una ligera diferencia, el valor exacto es el encontrado al usar la fórmula $\beta = 78° \, 41' \, 24.24''$

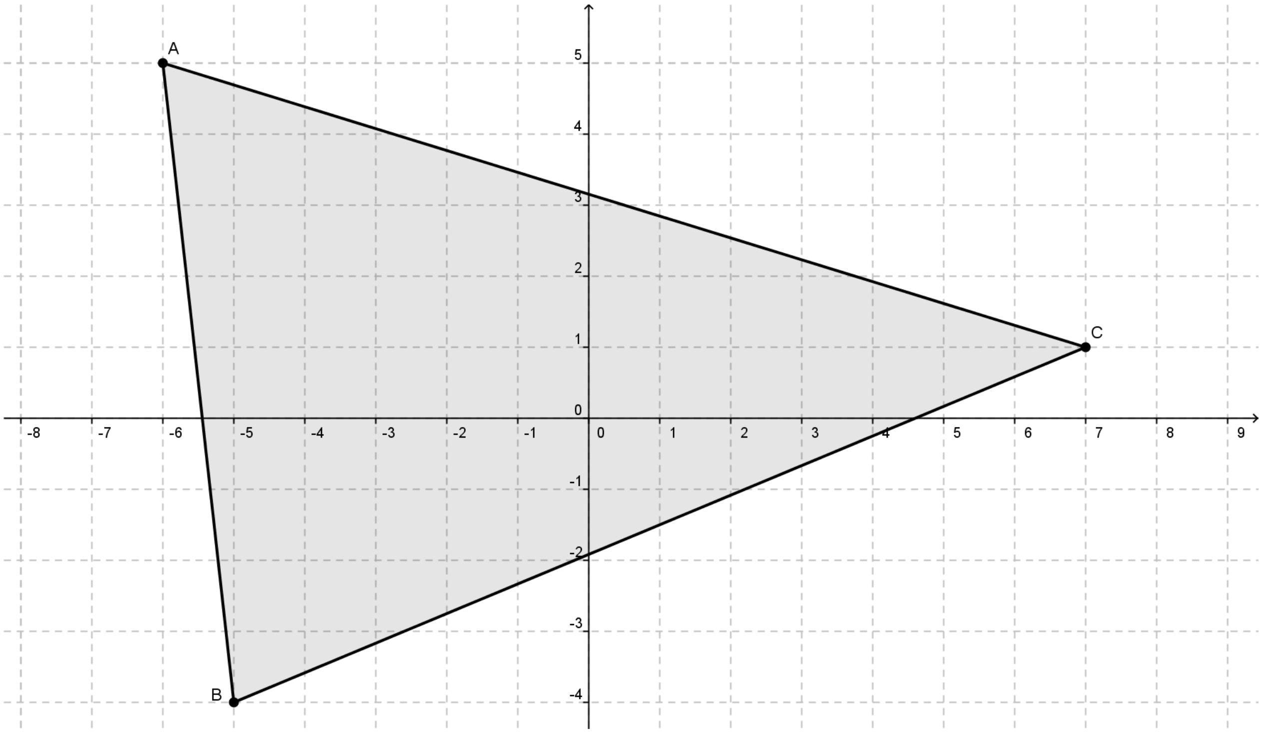
El signo negativo nos indica que está medido en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Ejemplo 2

Un triángulo tiene sus vértices en los puntos $A(-6, 5)$, $B(-5, -4)$ y $C(7, 1)$. Calcule la medida del ángulo B.

Solución

Para hacer este cálculo graficamos primero para ver cuáles pendientes necesitamos calcular, esto es las de los lados que forman el ángulo B y enseguida aplicamos la fórmula correspondiente.



Ángulos entre dos rectas

El lado BC corresponde a la m_1 y el lado AB a la m_2

$\mathrm{B}(-5,-4)$ y $\mathrm{C}\,(7,1)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{1-(-4)}{7-(-5)} = \frac{5}{12}$$

$\mathrm{B}(-6,5)$ y $\mathrm{A}(-5,-4)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{-4-5}{-5-(-6)} = \frac{-9}{1} = -9$$

Aplicando la fórmula para el ángulo entre los dos lados $(\mathrm{BC}$ y $\mathrm{AB})$:

$$\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1+(m_1)(m_2)}$$

$$\tan\beta = \frac{-9-\frac{5}{12}}{1+(-9)\left(\frac{5}{12}\right)}$$

$$\tan\beta = \frac{\frac{-113}{12}}{1+\frac{45}{12}} = \frac{\frac{-113}{12}}{\frac{-11}{4}} = \frac{113}{33}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{113}{33}\right) = 73.72\,°$$

$$\beta = 73°\,43'\,13.18''$$

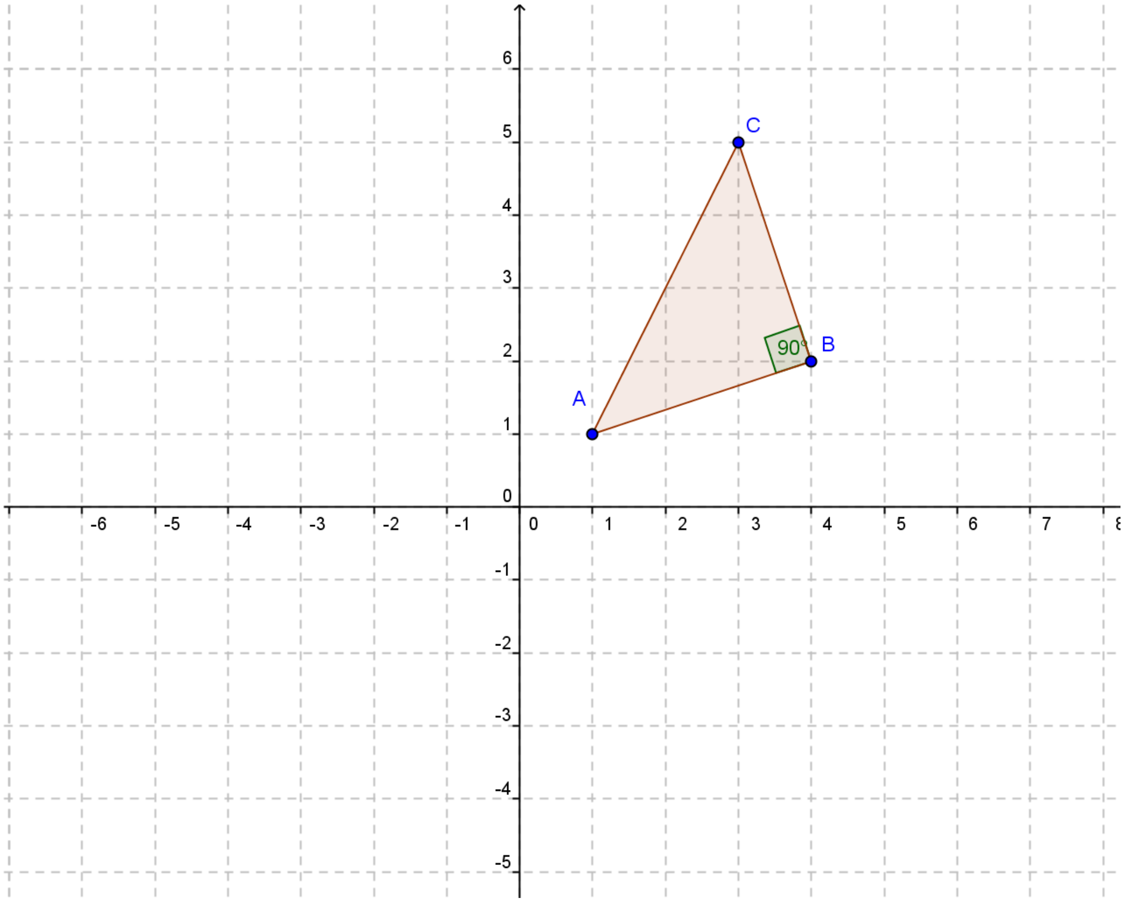
Que es la medida del ángulo B.

Ejemplo 3

Diana tiene un espejo triangular, si lo acomodamos en un sistema de coordenadas cartesianas, quedaría ubicado de la siguiente manera: $A(1,1)$, $B(4,2)$ y $C(3,5)$.

Mide los ángulos interiores del espejo y se da cuenta que el ángulo B mide $90°$, por lo tanto es un triángulo rectángulo. Encuentre la medida del ángulo A y C.

Solución



Los lados que forman el ángulo A son el AB y el AC, por lo que procedemos a calcular sus respectivas pendientes para posteriormente aplicar la fórmula y calcular el ángulo C.

Ángulos entre dos rectas

$A(1,1)$ y $B(4,2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

$A(1,1)$ y $C(3,5)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

Aplicando la fórmula para el ángulo entre los dos lados $(AC \text{ y } AB)$:

$$\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1)(m_2)}$$

$$\tan\beta = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + (2)\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$\tan\beta = \frac{\frac{5}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1$$

$$\beta = \tan^{-1}(1) = 45\,°$$

$$\beta = 45°\,0'$$

Por lo que la medida del ángulo A es igual a $45°$; si conocemos de antemano que el ángulo A mide $90°$, podemos concluir que el ángulo C mide $45°$ ya que el Teorema de ángulos interiores de los triángulos establece que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a $180°$.