Ecuación ordinaria – estándar

Ya que conocemos cuáles son los elementos que definen a la elipse vamos a graficar y obtenerlos cuando se dan algunos de ellos, o bien cuando nos dan la ecuación.

Ejemplo 1

a) $a = 4, b = 2, C(0,0)$, horizontal.

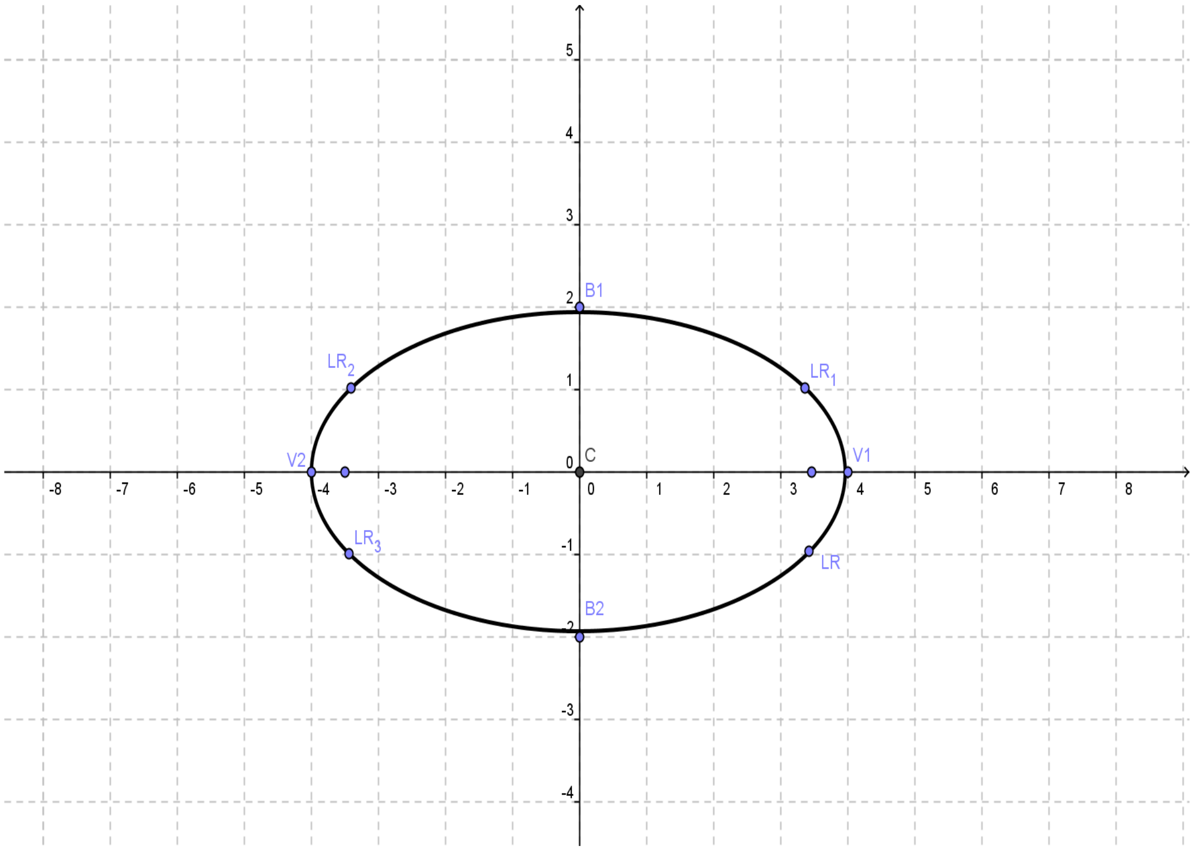
Solución

- Calculamos c, con $c^2 = a^2 - b^2$.
- Ubicamos el centro en el origen.
- Como es horizontal, medimos 4 unidades a la derecha del centro y cuatro unidades a la izquierda.
- Medimos 2 unidades hacia arriba del centro y dos hacia abajo para el eje menor.
- Medimos el valor de $c = \sqrt{12}$, que es aproximadamente 3.46 hacia la derecha y hacia la izquierda del centro que corresponde a los focos.
- Calculamos la longitud del lado recto con $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$, y obtenemos $\overline{LR} = 2$.
- Ubicamos la mitad de esa medida (1) hacia arriba y hacia abajo del foco.
- Unimos los puntos $V_1, \overline{LR}, B_1, \overline{LR}, V_2, \overline{LR}, B_2, \overline{LR}, V_1$, con una curva.
- Obtenemos la ecuación cuando el centro está en el origen y el horizontal.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Obtenemos las coordenadas de los elementos de la elipse.

Ecuación ordinaria – estándar



La ecuación: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

Coordenadas de los elementos:

$$C(0{,}0)$$
$$V_1(4,0), V_2(-4,0)$$
$$F_1(\sqrt{12},0), F_2(\sqrt{12},0)$$
$$B_1(0,2), B_2(0,-2)$$
$$\overline{LR}(\sqrt{12},1),(\sqrt{12},-1),(-\sqrt{12},1),(-\sqrt{12},-1)$$

b) La elipse está dada por la ecuación: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$

Solución

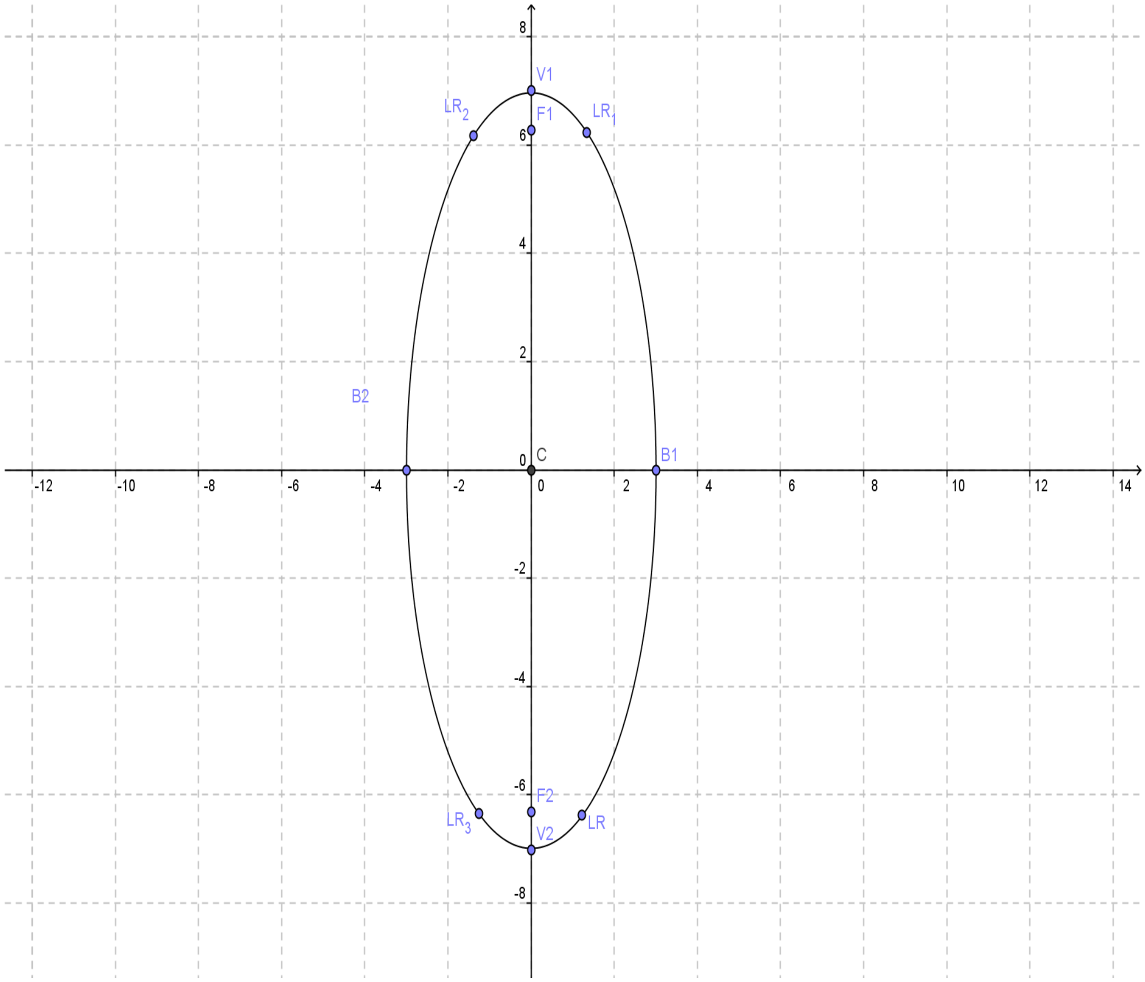
Si analizamos la ecuación podemos ver que:

- A la x^2 y a la y^2 no se le suma ni resta ningún número por lo que deducimos que el centro está en el origen.
- El denominador mayor está debajo de y^2, entonces es vertical.
- La "a" siempre es mayor que la "b", entonces $a = \sqrt{49}$ y $b = \sqrt{9}$; es decir, $a = 7$ y $b = 3$
- Calculamos c con $c^2 = a^2 - b^2$, y obtenemos:

$$c^2 = (7)^2 - (3)^2$$
$$c^2 = 40$$
$$c = \sqrt{40} \approx 6.3$$

- Calculamos la longitud del lado recto con $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$, y obtenemos $\overline{LR} = \frac{18}{7} \approx 2.57$
- Ubicamos la mitad de esa medida $\left(\frac{9}{7} \approx 1.28\right)$ hacia arriba y hacia abajo del foco.
- En el plano ubicamos el centro en el origen.
- Medimos del centro hacia arriba y hacia abajo el valor de "a" (recordemos que es vertical).
- Medimos hacia los lados del centro el valor de "b".
- Marcamos hacia arriba y hacia abajo el valor de "c".
- Ubicamos los lados rectos marcando hacia arriba y hacia debajo de "c", que son los focos.
- Unimos los puntos con una curva.
- Obtenemos las coordenadas de los elementos de la elipse.

Ecuación ordinaria – estándar



- La ecuación:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$$

Coordenadas de los elementos:

$$C(0,0)$$

$$V_1(0,9), V_2(0,-9)$$

$$F_1(0,\sqrt{40}), F_2(0,-\sqrt{40})$$

$$B_1(3,0), B_2(-3,0)$$

$$\overline{LR}\left(\frac{9}{7},\sqrt{40}\right),\left(\frac{9}{7},-\sqrt{40}\right),\left(-\frac{9}{7},\sqrt{40}\right),\left(-\frac{9}{7},-\sqrt{40}\right)$$

c) $C(-3,-1)$ longitud del eje mayor igual a 20 y $e = 0.5$, horizontal.

Solución

- Como el centro está fuera del origen y es horizontal, la ecuación que se aplica es:
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- La longitud del eje mayor corresponde a 2 a, por lo tanto:
$$2a = 20$$
$$a = 10$$

- Como la excentricidad es $e = \frac{c}{a}$, despejamos $c = (e)(a)$, sustituyendo obtenemos:
$$c = (0.5)(10)$$
$$c = 5$$

- Con $a = 10$ y $c = 5$, sustituimos en:
$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^2 = (10)^2 - (5)^2$$
$$b^2 = 100 - 25$$
$$b^2 = 75$$
$$b = \sqrt{75}$$

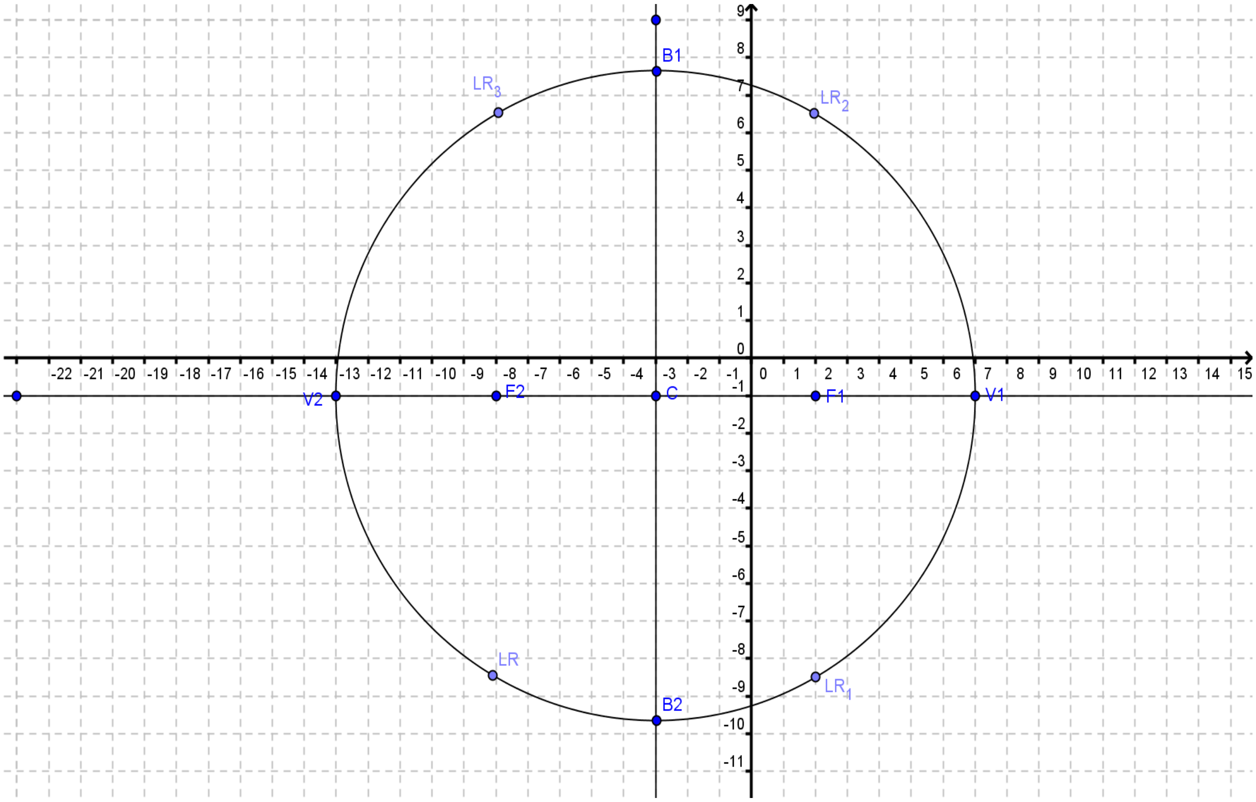
- La longitud del lado recto está dada por:
$$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2\left(\sqrt{75}\right)^2}{10} = 15$$

- La mitad del lado recto es: $\frac{15}{2} = 7.5$

Gráfica:

- Ubicamos el centro en $(-3,-1)$.
- Ubicamos los vértices hacia los lados del centro midiendo 10 unidades a cada lado del centro.
- Los focos se ubican marcando 5 unidades a cada lado del centro.
- El eje menor se mide del centro hacia arriba $\sqrt{75}$ y hacia abajo.
- Para la longitud del lado recto se mide $\frac{15}{2}$ a ambos lados de los focos.
- Se obtiene la ecuación de la elipse.
- Se obtienen las coordenadas de los elementos de la elipse.

Ecuación ordinaria – estándar



Ecuación: $C(-3,-1)$ $a = 10$, $b = \sqrt{75}$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x+3)^2}{(10)^2} + \frac{(y+1)^2}{\left(\sqrt{75}\right)^2} = 1$$
$$\frac{(x+3)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{75} = 1$$

Coordenadas de los elementos:

- $C(-3,-1)$
- $V_1(7,-1), V_2(-13,-1)$
- $F_1(2,-1), F_2\left(-8,-\sqrt{40}\right)$
- $B_1\left(-3,-1+\sqrt{75}\right), B_2\left(-3,-1-\sqrt{75}\right)\sqrt{75}$
- LR (2,13/2), (- 8, 13/2), (2,-17/2), (- 8, -17/2)
- $\overline{LR}\left(2,\frac{13}{2}\right),\left(-8,\ \frac{13}{2}\right),\left(2,\ \frac{17}{2}\right),\left(-8,\ \frac{17}{2}\right)$