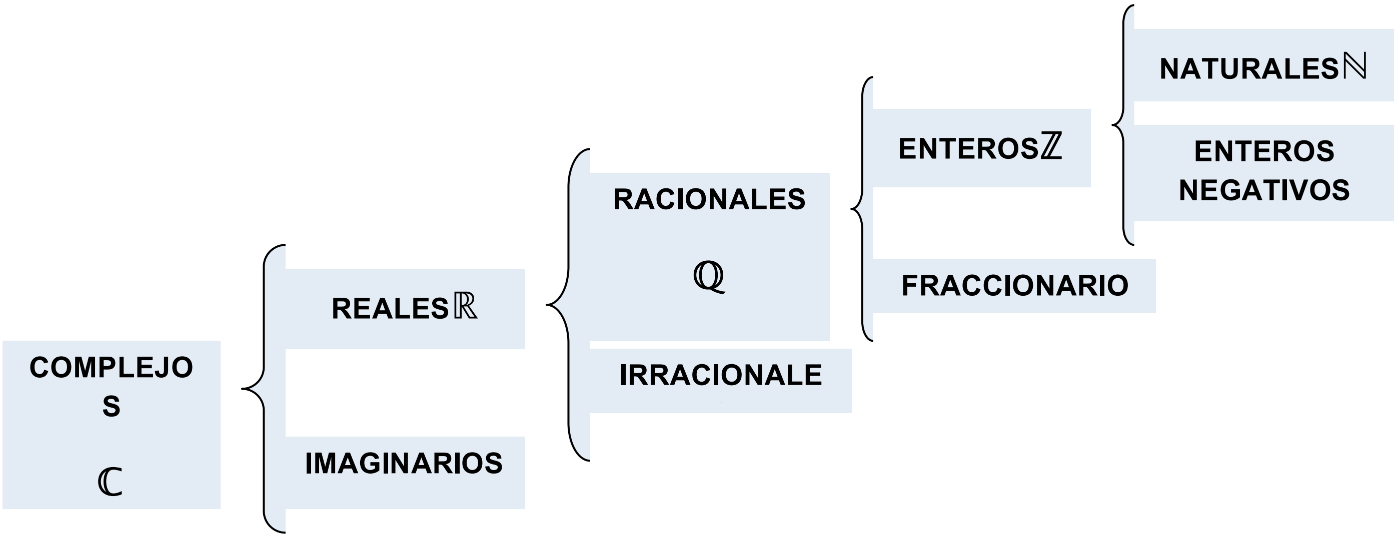
NÚMEROS REALES Y CONJUNTO

Clasificación General

Antes de comenzar a adentrarnos en el contenido temático dictado por el programa de tu Módulo de Matemáticas IV, es importante hacer una retrospectiva y recordar la clasificación de los números y, posteriormente, qué son los números reales, pues a partir de esto es que comenzaremos con las Funciones, Límites y Derivadas. COMENCEMOS



Números Complejos: contiene a los números reales y los imaginarios puros, y constituyen una de las construcciones teóricas más importantes de la inteligencia humana. Representan todas las raíces de los polinomios a diferencia de los reales. Siendo una extensión de los números reales, se cumple que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Son la herramienta de trabajo del álgebra ordinaria, matemáticas puras y aplicadas, aerodinámica y electromagnetismo.

Números imaginarios: es un número cuyo cuadrado es negativo. En 1777, cuando Leonhard Euler le dio a $\sqrt{-1}$ el nombre de i (por imaginario); aunque son un concepto válido, suponiendo un plano con ejes cartesianos en el que los reales se encuentran sobre el eje horizontal y los imaginarios sobre el eje vertical complejo. Cada número imaginario puede ser escrito como ib, donde b es un número real e i la unidad imaginaria, con la propiedad: $i^2 = -1$. Cada número complejo puede ser escrito como la suma de un número real y un número imaginario de esta forma: $a + bi$; al número imaginario "i" se le llama constante imaginaria. Gottfried Leibniz, en el siglo XVII, decía que $\sqrt{-1}$ es una especie de anfibio entre el ser y la nada.

Números Enteros: son una generalización del conjunto de números naturales la cual incluye números negativos (resultados de restar a un número natural otro mayor además del cero). Así, los números enteros están formados por un conjunto de enteros positivos que podemos interpretar como los números naturales convencionales, el cero, y un conjunto de enteros negativos que son los opuestos de los naturales (estos pueden ser interpretados como el resultado de restar a 0 un número natural).

Números Naturales: es cualquiera de los números: 0, 1, 2, 3... (o el mismo conjunto excluyendo el 0 según qué autores se consulten), que se pueden usar para contar los elementos de un conjunto. Reciben ese nombre porque fueron los primeros que utilizó el ser humano para contar objetos. Una propiedad importante del conjunto de los números naturales es que es un conjunto bien ordenado: esto es, cualquier conjunto compuesto de números naturales tiene un elemento mínimo (uno más pequeño que los demás).

Números Primos: son un subconjunto de los números naturales que engloba a todos los elementos de este conjunto mayores a 1 y los cuales son divisibles únicamente por sí mismos y por la unidad. Los números primos menores que cien son 25: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97. Pueden representarse mediante factorización (producto de números de primos). Euclides realizó la primera demostración alrededor del año 300 a. C. Un procedimiento empleado para hallar todos los números primos menores que un entero dado es el de la criba de Eratóstenes.

NÚMEROS REALES

Se definen como el conjunto de números los cuales se encuentran en correspondencia biunívoca con los puntos de una recta infinita. Se definen como la unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los irracionales. Se puede definir como un número positivo o negativo que puede o no tener cifras de decimal finito o infinito.

El teorema fundamental de la geometría analítica, establece que a cada número real le corresponde un punto en la recta de los números reales y viceversa. Con los números reales pueden realizarse todo tipo de operaciones básicas, con dos excepciones importantes: 1) No existen raíces de orden par, 2) No existen raíces negativas.

La suma, resta y producto de dos números reales son también números reales. El cociente de dos números reales será un numera real, siempre que el divisor sea diferente de cero. Los números reales se dividen en: Racionales e Irracionales.

- **Racionales:** es un numero real el cual se puede expresar como un cociente a/b, donde a y b son enteros y b ≠ 0. Siempre pueden representarse por expansiones decimales periódicas (repetición de decimales).

Ejemplos:

$$\frac{2}{3} = 0.666666 = 0.6$$

$$\frac{157}{495} = 0.317171717 = 0.317$$

$$\frac{9}{7} = 1.285714285714 = 285714$$

Irracionales: su desarrollo decimal no es periódico, mediante expansiones decimales infinitas. Entre más cifras se consideren es mejor la aproximación.

Ejemplos:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1.224744871$$

$$\log_{10}^{2} = 0.301029995$$

$$\pi = 3.141592653589796$$

CONJUNTO

Antecedentes al Contenido

Un conjunto A es una colección de objetos llamados los elementos de A. El símbolo $a \in A$ se emplea para indicar que "a" es un elemento de un conjunto A, mientras que $a \notin A$ quiere decir que "a" no es un elemento de A.

Un conjunto B es un subconjunto de un conjunto A, representado como $B \subset A$, si todo elemento de B es también un elemento de A. Dos conjuntos A y B son iguales si $A = B$,sí contienen los mismos elementos.

La unión $A \cup B$ de dos conjuntos A y B es el conjunto que contiene los elementos los cuales están en A, en B o bien en ambos. La intersección $A \cap B$ es el conjunto de elementos que están a la vez en A y en B, es decir, es el conjunto de elementos comunes a ambos conjuntos A y B.

El conjunto $\varnothing$ carece de elementos y se le llama conjunto vació. Si $A \cap B = \varnothing$ se dice que A y B son conjuntos ajenos o disjuntos.

El conjuntode los números reales se denota por el símbolo de$\mathbb{R}$, los racionales $\mathbb{Q}$,y los irracionales**H.** La unión de dos conjuntos es $R = Q \cup H$, sí $\mathbb{Q}$ y H no tienen elementos en común, se resume empleando la intersección de dos conjuntos $Q \cap H = \varnothing$.

Otra manera que podemos utilizar para nombrar los conjuntos es mediante la utilización de llaves y signos de relación de orden. Por ejemplo, el conjunto A formado por todos los enteros positivos menores que 7 se representan como:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$ o por notación de conjuntos;

$$A = \left\{ X \quad l \quad x \quad es \quad un \quad entero, \quad y \quad 0 < x < 7 \right\}$$

Se lee "A es el conjunto de x tales que x es un entero, y 0 < x < 7"

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Nos indican la estructura más general de un cuerpo ordenado:

1. **Cerradura en la suma:**

   Sí $x, y \in R, entonces; x + y \in R$

2. **Conmutativa en la suma:**

   Sí $x, y \in R, entonces; x + y = y + x$

3. **Asociativa en la suma:**

   Sí $x, y, z \in R, entonces; (x + y) + z = x + (y + z)$

4. **Neutro Aditivo:**

   Existe $0 \in R$ de manera que; $x + 0 = x \dot{A} x \in R$

5. **Inverso Aditivo:**

   Para cada $x \in R$ existe un elemento $-x \in R$ tal que $-x + x = 0$

6. **Cerradura en la Multiplicación:**

   Sí $x, y \in R, entonces; xy \in R$

7. **Conmutativa en la multiplicación:**

   Sí $x, y \in R, entonces; xy = yx$

8. **Asociativa en la multiplicación:**

   Sí $x, y, z \in R; entonces (xy)z = x(yz)$

9. **Neutro multiplicativo:**

   Existe $1 \in R$ de manera que x1=x para cualquier $x \in R$

10. Inverso Multiplicativo:

Para cada $x \in R$ existe un elemento $x^{-1} \in R, tal$ que $\mathrm{x}^{-1} x = 1$

11. Distributiva de la multiplicación en la suma:

Sí $x, y, z \in \mathrm{R}$, entonces $\mathrm{x(y + z) = xy + xz}$

12. Ley de la Tricotonomía:

Sí $x, y \in R, entonces$ se cumple solo una de estas : $\mathrm{x < y, y < x, x = y}$

13. Transitividad:

Sí $x, y, z \in R, x < y$, $\mathrm{y < z}$ entonces $\mathrm{x < z}$

14. Monotonía en la suma:

Sí $x, y, z \in R$ y $\mathrm{x < y}$, entonces $\mathrm{x + z < y + z}$

15. Monotonía en la multiplicación:

Sí $x, y, z \in R, x < y, y\ 0 < z, entonces; xz < yz$

Ejemplos:

- **Conmutativa en la suma**: La conmutatividad implica que no importa el orden de operación, el resultado siempre es el mismo.

$$\boxed{\mathrm{x + y = y + x}}$$

4 + 2 = 2 + 4

- **Asociativa de adición:** La asociatividad implica que no importa el orden en el cual se agrupe, el resultado es el mismo.

$$\boxed{(x + y) + z = x + (y + z)}$$

(4 + 2) + 9 = 4 + (2 + 9)

- **Conmutativa de multiplicación:**

$$\boxed{x \cdot y = y \cdot x}$$

4 . 2 = 2 . 4

- **Asociativa de multiplicación:**

$$\boxed{x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z}$$

4 . (2 . 9) = (4 . 2) . 9

- **Distributiva de multiplicación sobre adición:**

$$\boxed{x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z}$$

4 . (2 + 9) = 4 . 2 + 4 . 9

Axiomas de Orden.

Establecen una relación de orden de "cantidad; esta relación es del tipo mayor(**>**) o igual. Se dice que un número es menor a otro si está contenido en este, es decir, si su cardinalidad es menor(**<**) o igual que otra.

Para establecer una relación de orden, es necesario introducir el símbolo de > o < el cual nos indica si un número es mayor o menor que otro. Se dirá que x < y o y > x solo si x es menor que y. Si y es mayor que x.

Antecedentes al Contenido

1.1.- Sí $x, y \in R$ entonces se cumple una y solo una de las siguientes afirmaciones :

$x < y; x = y, x > y$

1.2.- Si $x < y$ y además $y < z$ entonces $x < z$. Dice geométricamente que si "x" está a la izquierda de "y" y este a su vez a la izquierda de "z", entonces debe estar "x" a la izquierda de "z".

1.3.-Sí $x < y$ entonces $x + y < y + z$ para todo $z \in R$.

1.4.-Sí $x < y$ y $z < 0$ entonces $xz < yz$.