PROPIEDADES DE LOS LÍMITES INFINITOS

Sean c y L números reales, y f y g funciones tales que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to c} g(x) = L$$

I. **Suma o diferencia:** $\lim_{x \to c}[f(x) \pm g(x)] = \infty$

II. **Producto:** $\lim_{x \to c}[f(x)g(x)] = \infty, \ L > 0$

$$\lim_{x \to c}[f(x) \pm g(x)] = -\infty, \qquad L < 0$$

III. **Cociente:** $\lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Resumiendo las propiedades:

Forma del límite $x \to a, \infty, -\infty$	$\frac{L}{\pm\infty}$	$\frac{\pm\infty}{L}$	$\frac{L}{0}$	$L * \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	∞^n	L^∞
El límite es:	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Ejemplos:

1) Se tienen las siguientes funciones: $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ y $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ obtener la suma,

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \infty$$

2) Si $\lim_{x\to 1^-}(x^2+1) = 2$ y $\lim_{x\to 1^-}(\cot \pi x) = -\infty$, se deduce que:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{\cot \pi x} = 0$$

3) Al ser $\lim_{x\to 0^+} 3 = 3$ y $\lim_{x\to 0^+} \cot x = \infty$, se tiene:

$$\lim_{x\to 0^+} 3\cot x = \infty$$

4) $\mathbf{lim}_{x\to 6} \frac{\mathbf{4}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{6})^{\mathbf{2}}} = \frac{4}{(6-6)^2} = \frac{4}{0} = \infty$

5) $\mathbf{lim}_{x\to -\infty}\left(\frac{\mathbf{6}}{\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}}+\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[5]{\boldsymbol{x}}}\right) = \frac{6}{\sqrt[3]{\infty}}+\frac{1}{\sqrt[5]{\infty}} = \frac{6}{\infty}+\frac{1}{\infty} = 0$

6) $\mathbf{lim}_{x\to -\infty}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{-3}}{3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{-2}} = \frac{-\infty-(-\infty)^3}{3(-\infty)+(-\infty)^{-2}} = \frac{-\infty+\infty}{\infty+\infty} = -\infty$

7) $\mathbf{lim}_{x\to\infty}\frac{\boldsymbol{x}^{2}-3\boldsymbol{x}}{4\boldsymbol{x}^{2}+5}$

El procedimiento general para determinar el comportamiento de una función racional, cuando el límite tiende a infinito o menos infinito: "Divídase el numerador y el denominador entre la potencia más

$$= \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}} = \frac{1 - {}^{3}/_{x}}{4 + {}^{5}/_{x^2}} = \frac{1 - {}^{3}/_{\infty}}{4 + {}^{5}/_{\infty^2}} = \frac{1-0}{4+0} = {}^{1}/_{4}$$

8) $\lim_{x\to\infty} \frac{1+2x^n}{5+3x^n}$

$$= \frac{\frac{1}{x^n} + \frac{2x^n}{x^n}}{\frac{5}{x^n} + \frac{3x^n}{x^n}} = \frac{\frac{1}{x^n} + 2}{\frac{5}{x^n} + 3} = \frac{\frac{1}{\infty^n} + 2}{\frac{5}{\infty^n} + 3} = \frac{\frac{1}{\infty} + 2}{\frac{5}{\infty} + 3} = \frac{2}{3}$$