Derivada de funciones logarítmicas

La inversa de una función exponencial se conoce como función Logaritmo Natural; su dominio son todos los reales positivos y su rango todos los números reales.

PROPIEDADES DE UN LOGARITMO NATURAL

a) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

b) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

c) $\ln x^y = y \ln x$

d) $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$

e) $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

DERIVADA DE UN LOGARITMO NATURAL

$$\boldsymbol{D_x(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

$$\boldsymbol{D_x \frac{1}{u} = \frac{1}{u} D_x u}$$

Ejemplos:

1) $\boldsymbol{D_x\left(\ln(\sec 4x)\right)}$

$$= \frac{1}{sec\ 4x} D_x\ (sec\ 4x)$$

$$= \frac{\sec 4x \tan 4x\ D_x\ (4x)}{\sec 4x}$$

$$\frac{4 \sec 4x \tan 4x}{\sec 4x} = 4 \tan 4x$$

Derivada de funciones logarítmicas

$\mathbf{2)}\ \boldsymbol{D_x(\,ln\ sen\ x)} = \frac{1}{sen\ x} D_{\ x}(sen\ x)$

$$= \frac{cos\ x}{sen\ x} = cot\ x$$

$\mathbf{3)}\ \boldsymbol{D_x\big(\,ln(sec + tan\ x)\big)}$

$$= \frac{D_x\ (\ sec\ x + tan\ x)}{sec\ x + tan\ x}$$

$$= \frac{\sec x \tan x\ +\ sec^2\ x}{\sec x\ + \tan x} = \sec x$$

$\mathbf{4)}\ \boldsymbol{\frac{d}{dx}[ln\ (2x)]}$

$$= \frac{1}{2x}\frac{d}{dx}(2x)$$

$$= \frac{1}{2x} * (2) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

$\mathbf{5)}\ \boldsymbol{\frac{d}{dx}[ln(x^2 + 1)]}$

$$= \frac{1}{x^2 + 1}\frac{d}{dx}(x^2 + 1)$$

$$= \frac{2x}{x^{2+1}}$$

Derivada de funciones logarítmicas

6) $\frac{d}{dx}[\,x\ ln\ x]$

$$= x\ \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(\,x)$$

$$= x\ \left(\frac{1}{x}\right) + \ln x\ (1) = 1 + \ln x$$

7) $\frac{d}{dx}[(\ln x)^3]$

$$= 3(ln\ x)^2 \frac{d}{dx}(ln\ x)$$

$$= 3(ln\ x)^2 \frac{1}{x}$$

8) $f(x) = ln\ \sqrt{x+1}$

Aplicando leyes de logaritmos

$$f(x) = ln(x+1)^{1/2} = \frac{1}{2} ln(x+1)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx} ln(x+1) +\ ln(x+1)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{1}{x+1}\frac{d}{dx}(x+1) + 0$$

$$= \frac{1}{2(x+1)}$$

Derivada de funciones logarítmicas

9) $\boldsymbol{f(x) = ln\ \frac{x\,(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}}$

Aplicando leyes de logaritmos

$$f(x) = ln\ x + 2\ ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ ln(2x^3-1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{6x^2}{2x^3-1}\right)$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{4x}{x^2+1} - \frac{3x^2}{2x^3-1}$$

DERIVADA DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS EN BASE a

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARITMO EN BASE a

1. $\log_a x = \frac{ln\ x}{ln\ a}$
2. $\log_x(xy) = \log_a x + \log_a y$
3. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
4. $\log_a x^y = y\ \log_a x$
5. $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$
6. $\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$

Derivada de funciones logarítmicas

DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO EN BASE a

$$\boldsymbol{D_x(\log_a x) = \frac{1}{(ln\ a)x}}$$

$$\boldsymbol{D_x(\log_a u) = \frac{D_x u}{(ln\ a)u}}$$

Ejemplos:

1. $\boldsymbol{D_x(\log_3(4x))}$

$$= \frac{D_x(4x)}{(ln3)(4x)} = \frac{1}{(ln3)(x)}$$

2. $\boldsymbol{D_x(\log_2(sen\ x))}$

$$= \frac{D_x(sen\ x)}{ln\ 2\ senx} = \frac{cos\ x}{(ln\ 2)sen\ x} = \frac{cot\ x}{ln\ 2}$$

3. $\boldsymbol{D_x(\log_5(sec\ x))}$

$$= \frac{D_x\,(sec\ x)}{(ln\ 5)sec\ x} = \frac{tan\ x}{ln\ 5}$$

4. $\boldsymbol{D_x(\log_a(x^2 + 3x))}$

$$= \frac{D_x(x^2 + 3x)}{(ln\ a)(x^2 + 3x)} = \frac{(2x + 3)}{(\ln a)(x^2 + 3x)}$$