Concavidad

Una forma cóncava hacia arriba "retiene el agua", mientras que una forma cóncava hacia abajo "derrama el agua"; observemos las siguientes figuras:

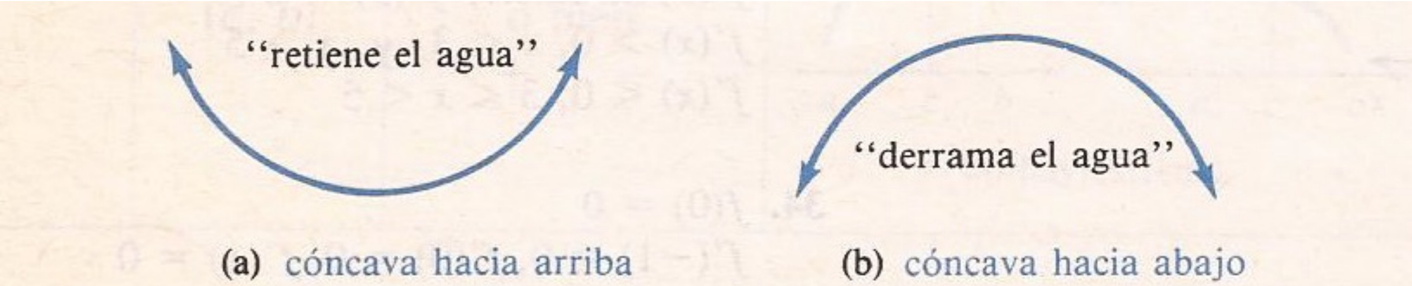
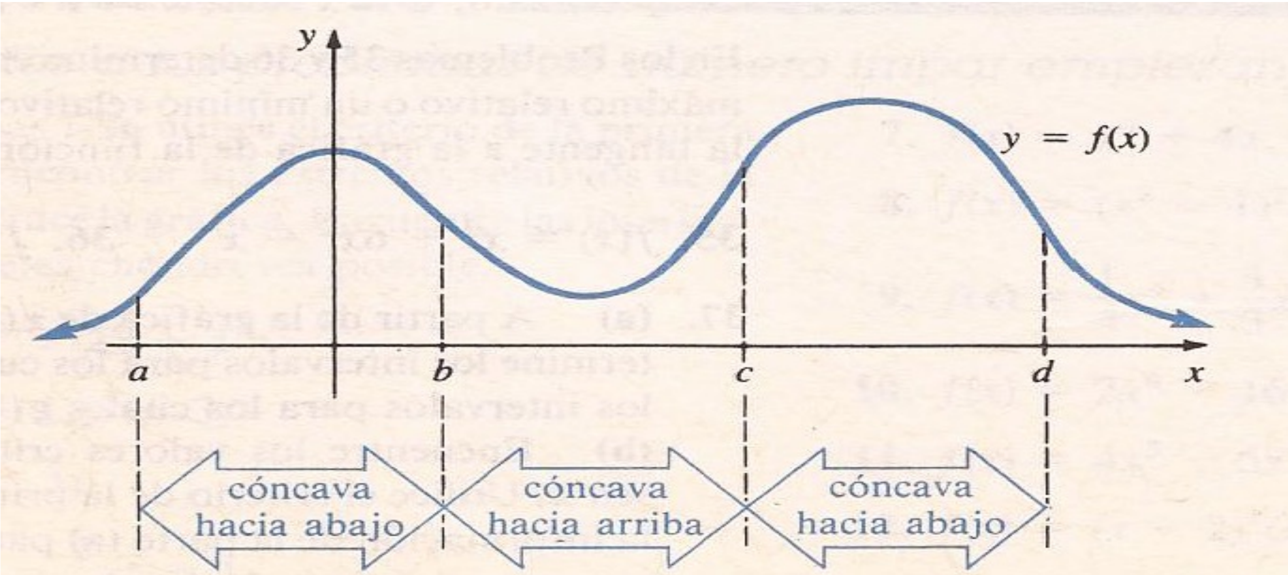


Figura 4.48

Si la función es diferenciable en el intervalo (a, b)

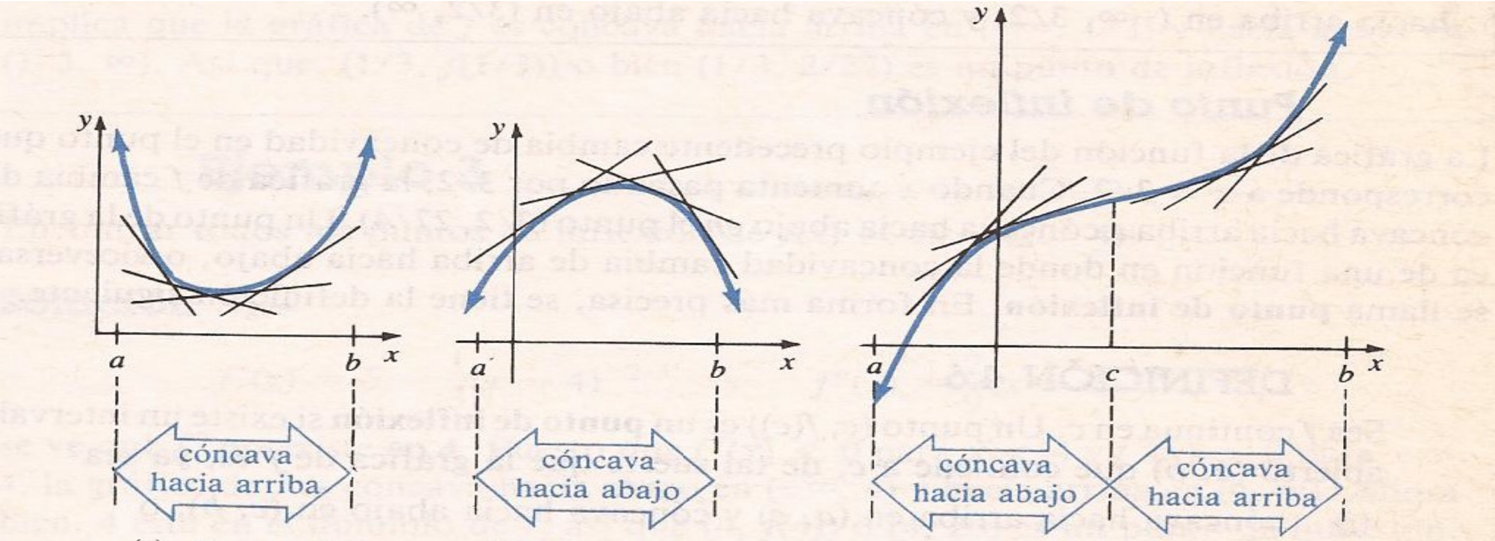
Si f' es una función creciente en (a, b) entonces la gráfica de la función es cóncava hacia arriba en el intervalo.

Si f'es una función decreciente en (a, b), entonces la gráfica de la función es cóncava hacia abajo en el intervalo.



Si la pendiente de la recta tangente aumenta (disminuye) en (a, b), entonces la gráfica de la función es cóncava hacia arriba (abajo) en el intervalo. La gráfica de una función es cóncava hacia arriba, en un intervalo, si en cualquier punto la gráfica está situada por encima de la tangente en el punto. Una gráfica que es cóncava hacia abajo en un intervalo está situada por debajo de las rectas tangentes.

Concavidad



(a) f' es creciente de $-$ a $+$

(b) f' es decreciente de $+$ a $-$

(c) f' es decreciente en (a, c)
f' es creciente en (c, b)

Concavidad y la segunda derivada

El signo algebraico de la derivada de una función nos indica cuando la función es creciente o decreciente en un intervalo. El signo algebraico de la derivada f'' indica cuando f' es creciente o bien decreciente en un intervalo. Por ejemplo: si $f''(x) > 0$ en (a, b) entonces f' aumenta en (a, b). Si f' aumenta en (a, b), entonces la gráfica de la función es cóncava hacia arriba en el intervalo.

Si la segunda derivada de la función existe en (a, b):

Si $f''(x) > 0$ para todo "x" en (a, b), entonces la gráfica de la función es cóncava hacia arriba en (a, b).

Si $f''(x) < 0$ para todo "x" (a, b),en entonces la gráfica de la función es cóncava hacia arriba en (a, b).

Ejemplo:

Determinar los intervalos en los que la gráfica de $\mathrm{f(x)} = -\mathrm{x}^3 + 9/2\mathrm{x}^2$ es cóncava hacia arriba y en los que es cóncava hacia abajo.

La primera derivada es:

$$\boldsymbol{f'(x) = -3x^2 + 9x}$$

La segunda derivada es:

$$\boldsymbol{f''(x) = -6x + 9 = 6(-x + \frac{3}{2})}$$

$f''(x) > 0$ cuando $6(-x + \frac{3}{2}) > 0$ o $x < 3/2$ y que $f''(x) < 0$ cuando $6(-x + \frac{3}{2}) < 0$ o $x > 3/2$.

La gráfica de la función es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 3/2)$,

Cóncava hacia abajo en $(3/2, \infty)$.