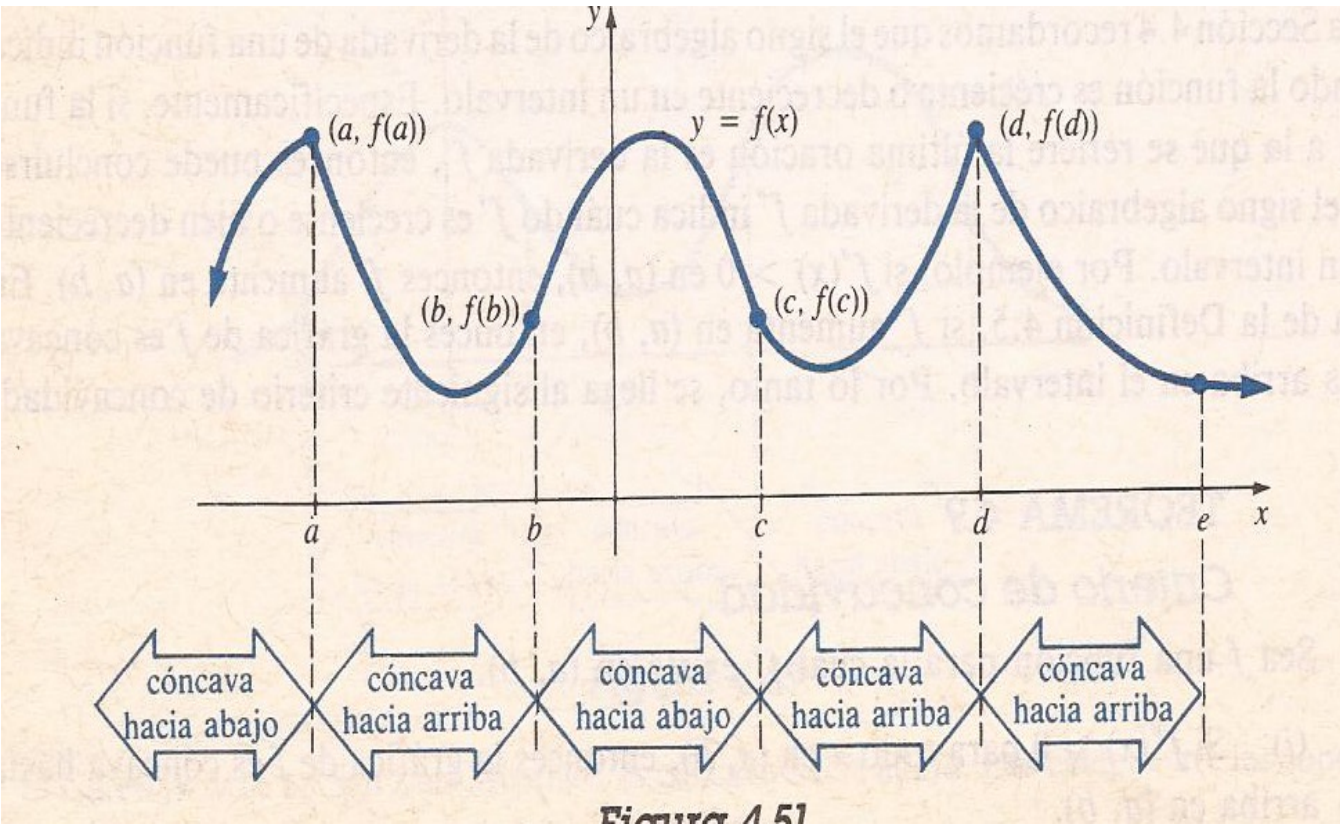
Puntos de una Función Inflexión

Un punto de la gráfica de una función en donde la concavidad cambia de arriba hacia abajo, o viceversa, se llama punto de inflexión.

Si una función es continua en el punto c. Un punto $(c, f(c))$ es un punto de inflexión si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a "c", de tal suerte que la gráfica de la función sea:

- *Cóncava hacia arriba en (a, c) y cóncava hacia abajo en (c, b) o*
- *Cóncava hacia abajo en (a, c) y cóncava hacia arriba en (c, b).*

En la gráfica de la función $y = f(x)$ se muestran tres puntos de inflexión: $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $(c, f(c))$. En $(d, f(d))$ no es un punto de inflexión, debido a que la gráfica es cóncava hacia arriba en los dos intervalos (c, d) y (d, e).



Puntos de una Función Inflexión

Un punto de inflexión $(c, f(c))$ *ocurre en un número c para el cual* $f''(c) = 0$ *o bien* $f''(c) = no\ existe.$

Ejemplos:

1. **Encontrar los puntos de inflexión de** $\boldsymbol{f(x) = -x^3 + x^2}$

$$f'(x) = -3x^2 + 2x$$
$$f''(x) = -6x + 2$$

- $f''(x) = 0$ *en* $1/3$ *el punto* $(^1/_3, 2/27)$ *es el único punto de inflexión posible;*

$$f''(x) = 6\left(-x + \frac{1}{3}\right) > 0 \quad para\ x < 1/3$$
$$f''(x) = 6\left(-x + \frac{1}{3}\right) < 0 \quad para\ \ x > 1/3$$

- *Implica que la gráfica de la función es cóncava hacia arriba en* $(-\infty, 1/3)$*y hacia abajo en* $\left(1/3, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ *o bien* $\left(\frac{1}{3}, 2/27\right)$*es un punto de inflexión*

2. **Encontrar los puntos de inflexión de** $\boldsymbol{f(x) = 5x - (x-4)^{1/3}}$

$$f'(x) = 5 - \frac{1}{3}(x-4)^{-2/3}$$

$$f''(x) = \frac{2}{9}(x-4)^{-5/3}$$

- $f''(x)$*no existe en* $4.$
- $f''(x) < 0$ *para* $x < 4.$
- $f''(x) > 0$ *para* $x > 4.$
- *La gráfica es cóncava hacia abajo en* $(-\infty, 4)$
- *Cóncava hacia arriba en* $(4, \infty)$
- *El 4 esta en el dominio de la función*
- *Así que* $(4, f(4))$ *ó* $(4{,}20)$ *es un punto de inflexión.*