Criterio de la Primera Derivada

La derivada de una función f es positiva en un intervalo, por lo cual la función es creciente en el intervalo; geométricamente, la grafica de una función creciente se eleva cuando x aumenta. Si la derivada de una función f es negativa en el intervalo, entonces f es decreciente, lo cual significa que su gráfica va hacia abajo cuando "x" aumenta.

La derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función $y = f(x)$ es su razón de cambio instantánea con respecto a la variable x. Cuando una función describe posición o distancia, entonces su razón de cambio con respecto al tiempo se interpreta como velocidad. Una razón de cambio (intensidad de variación) con respecto al tiempo. Por ejemplo, un volumen V, el cual varía o cambia con el tiempo, entonces $\frac{dV}{dt}$ es la razón o la rapidez, a la cual está variando el volumen con respecto al tiempo.

Una razón de $\frac{dV}{dt} = 10\ \frac{cm^3}{s}$ significa que el volumen está aumentando 10 centímetros cúbicos cada segundo. Si una persona camina hacia un poste a una razón de cambio constante de 3 pies/segundo, entonces $\frac{dx}{dt} = -3\ \square ie/s$. Si la persona camina alejándose del poste, entonces $\frac{dx}{dt} = 3\ pie/s$. La razón negativa y positiva significan que la distancia x está decreciendo y creciendo, respectivamente.

Algunas sugerencias para resolver este tipo de problemas: dibuja la ilustración, designa símbolos para cada una de las cantidades que varían con el tiempo; analiza el enunciado y distingue cuáles razones se conocen y cuál es la razón que se requiere, plantea una ecuación que relacione las variables, deriva la ecuación anterior (derivación implícita); la ecuación resultante relaciona las razones según cuáles cambian las variables.

Ejemplos:

1. ***Un cuadrado se expande con el tiempo. ¿Cómo se relaciona la razón de aumento del área del cuadrado con la razón de aumento de la longitud de su lado?***
   - En cualquier instante el área es una función de su longitud: $\boldsymbol{A = x^2}$
   - Las razones relacionadas se obtienen derivando con respecto al tiempo $\boldsymbol{\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}x^2}$
   - $\boldsymbol{\frac{dA}{dt} = 2x\frac{d}{dt}}$ en donde dA/dt y d/dt son las razones relacionadas.

2. ***Se inyecta aire a un globo esférico a razón de 20 pie³/min. ¿A qué razón varía el radio cuando mide 3 pie?***

- El radio lo designamos con la letra "r" y su volumen por "v"
- $\frac{dV}{dt} = \frac{20pie^3}{min}$
- $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3}$ evaluando la derivada
- La relación entre radio y volumen está dada por: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- Derivando: $\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\ \pi \frac{d}{dt} r^3$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right)$$

$$= 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

- Pero $\frac{dV}{dt} = 20$; por lo tanto, $20 = 4\pi r^2 dr/dt$, se produce:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{20}{4\pi r^2} = \frac{5}{\pi r^2}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3} = \frac{5}{9\pi}\frac{pie}{min} \approx 0.18\, pie/min$$

3.- Un aeroplano de 10^5 kg de masa vuela en línea recta, al tiempo en que se forma hielo en los bordes delanteros de sus alas a una razón constante de 30 kg/h.

a) ¿Cuál es la razón de cambio de la cantidad de movimiento del avión, si vuela a 800 km/h?

$$\frac{dm}{dt} = 30\ kg/h$$

Se quiere obtener $\frac{dp}{dt}$ $, donde\ p = mv$

Si la velocidad es constante (v);

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt} v = 30\frac{kg}{h} * 800\frac{km}{h} = 24\,000\ kg * km/h^2$$

b) ¿Cuál es la razón de cambio de la cantidad de movimiento del avión, cuando t=1h, si en ese instante su velocidad es de 750 km/h y aumenta a una razón de 20km/h?

$$\frac{dm}{dt} = 30\ kg/hv(1) = 750\frac{dv}{dt}\bigg|_{t=1} = 20\ km/h^2$$

$$\frac{dp}{dt}\bigg|_{t=1} \qquad donde\ p = mv$$

$\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\ \frac{dm}{dt}$ Aplicando regla del producto

$$\frac{dp}{dt}\bigg|_{t=1} = 10^5 * 20 + 750 * 30 = 2.0225 \times 10^6\ kg * km/h^2$$

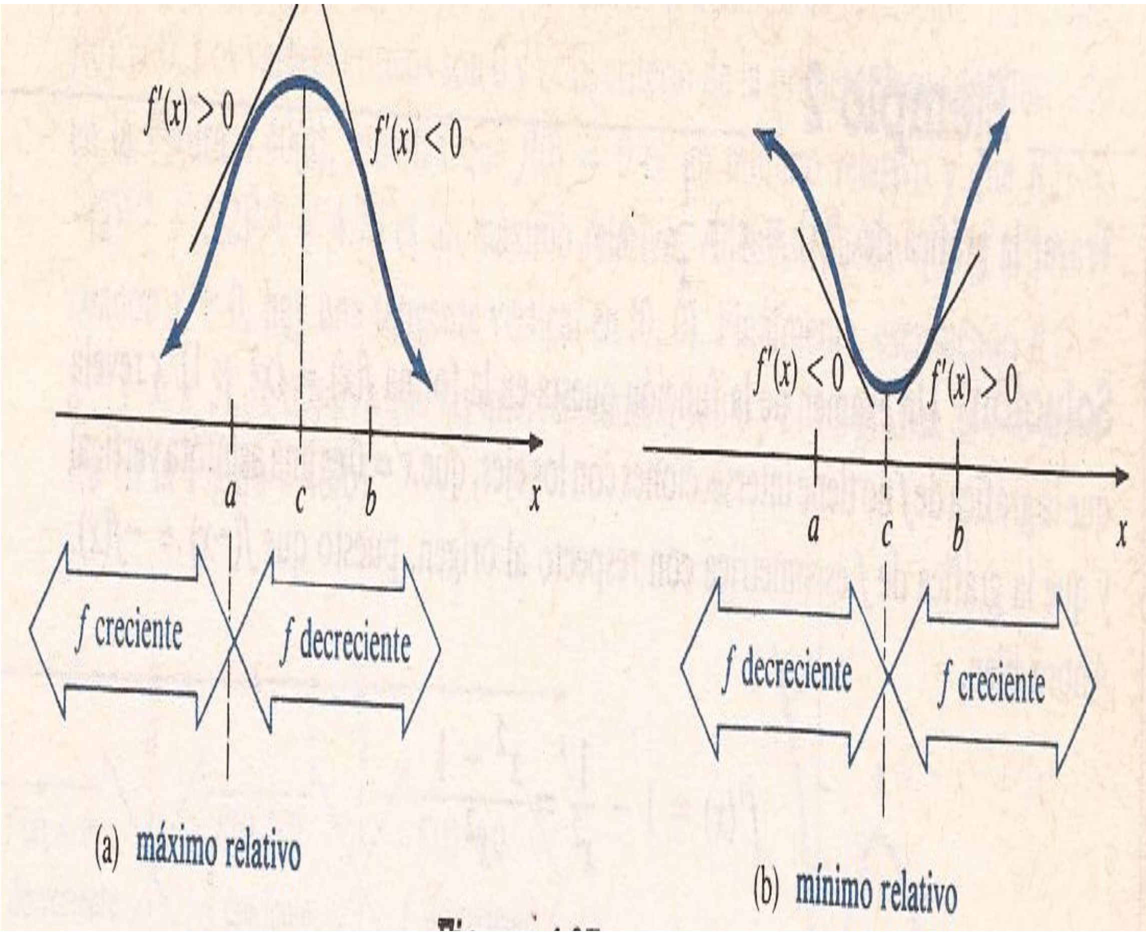
Criterio de la Primera Derivada

TRAZO DE GRÁFICAS Y LA PRIMERA DERIVADA

El saber si una función tiene o no extremos relativos es de gran ayuda para el trazo de la grafica; si una función tiene un extremo relativo, este debe ocurrir en un valor crítico; encontrando los valores críticos de una función se obtiene una lista de abscisas que corresponden, posiblemente, a extremos relativos.

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA:

Si la función es diferenciable en el intervalo (a, b) y "c" es un valor crítico en el intervalo. Si $f'(x) > 0$ para todo $x\ en\ (a, b)$ y $f'(x) < 0$ para todo $x\ en\ (c, b)$; entonces la gráfica de la función sobre el intervalo (a,b) es: a)máximo relativo; b) mínimo relativo



Criterio de la primera derivada para extremos relativos:

Criterio de la Primera Derivada

Si la función es continua en el intervalo $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), excepto, posiblemente en el valor crítico "c".

- Sí $f'(x) > 0$ para $a < x < c$ y $f'(x) < 0$ para $c < x < b$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.
- Sí $f'(?) > 0$ para $a < x < c$ y $f'(x) > 0$ para $c < x < b$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.

Ejemplos:

1) Traza la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$

   La primera derivada es: $\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)}$

   Los valores críticos son: $-1\ y\ 3$

   De acuerdo a los criterios de la derivada:

   - $f'(x) > 0$ para $-\infty < x < -1$
   - $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 3$
   - $f(-1) = 7$ es un máximo relativo
   - Por lo cual para $-1 < x < 3$ y $f'(x) > 0$ para $3 < x < ?$
   - $f(3) = -25$ es un mínimo relativo
   - La intercepción se presenta en $f(0) = 2$
   - Analizando la ecuación $x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = 0$ indica que -2 es una raíz real y por lo tanto una intercepción en "x". Dividiendo entre el factor $x + 2$ se obtiene $(x + 2)(x^2 - 5x + 1) = 0$. La fórmula de la cuadrática revela dos intercepciones "x" adicionales:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{b(-5)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$x_1 \approx 0.21 \quad x_2 \approx 4.79$$

Criterio de la Primera Derivada

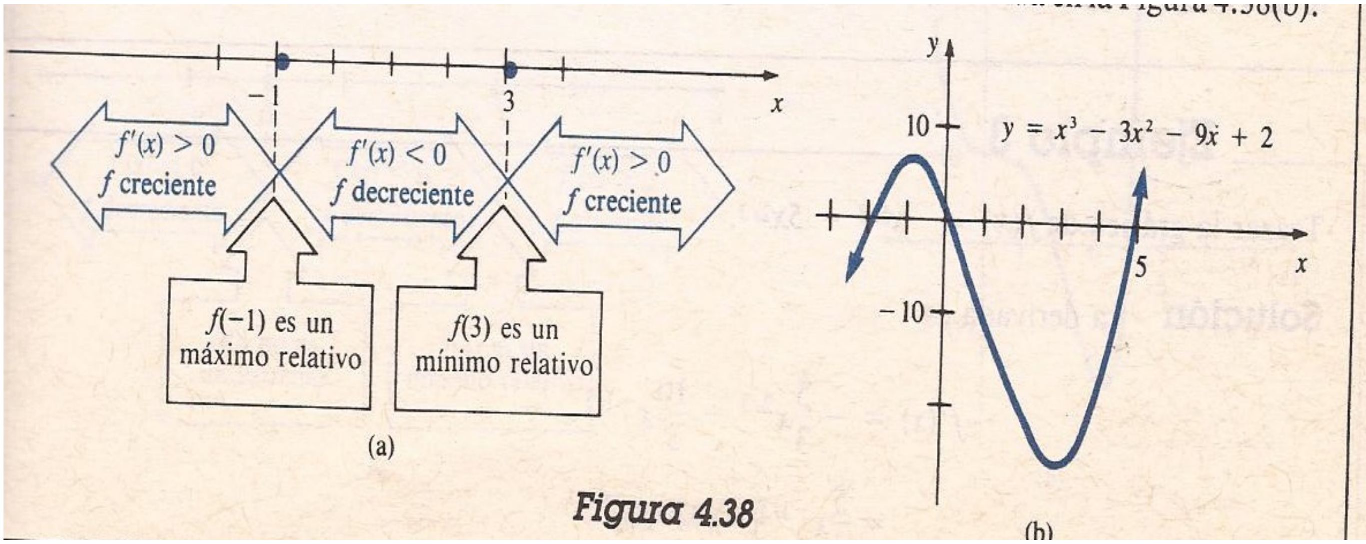


Figura 4.38

2) Traza la gráfica de $f(x) = x + \frac{1}{x}$

- Analizando la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$ indica que no se tienen intersecciones con los ejes.
- En $x = 0$ se tiene una asíntota vertical.
- La gráfica es simétrica respecto al origen ya que $f(-x) = -f(x)$
- La primer derivada es:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

- Los valores críticos son: -1 y 1
- $f'(x) > 0$ para $-\infty < x < -1$
- $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 0$
- $f(-1) = -2$ es un máximo relativo
- $f(1) = 2$ es un mínimo relativo

Criterio de la Primera Derivada