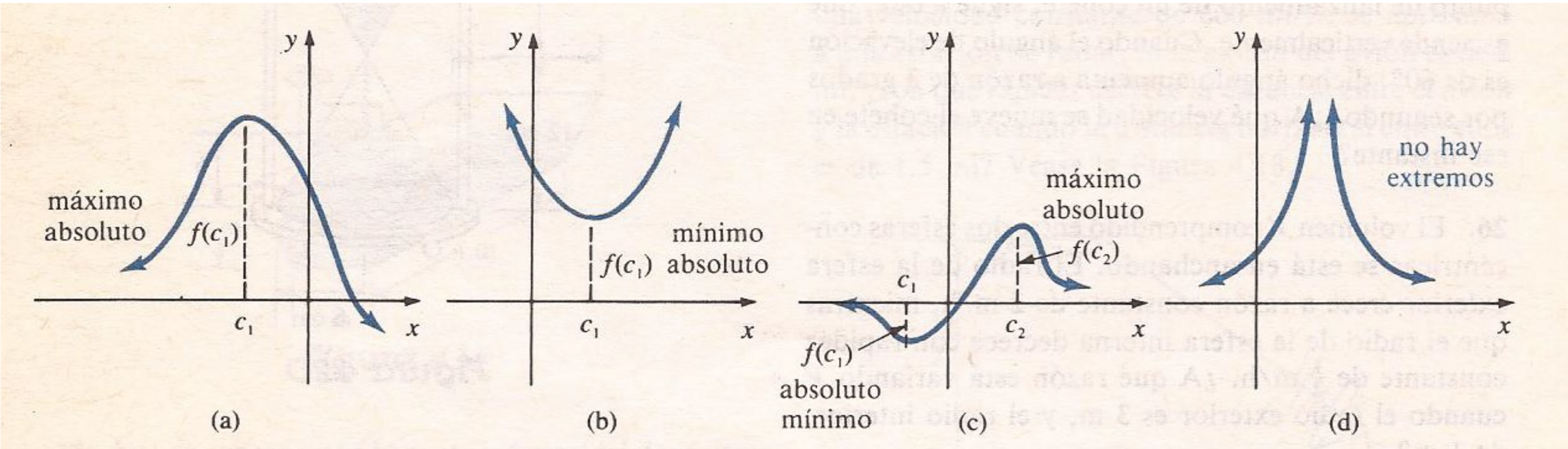
Máximos y Mínimos

Una función definida en un intervalo. Los valores máximos y mínimos de la función en el intervalo se les llama extremos de la función, los cuales se dividen en:

Un número f(c1) es un máximo absoluto de una función f si $f(x) \leq f(c_1)$ para todo x en el dominio de f.

Un número f(c1) es un mínimo absoluto de una función f $f(x) \geq f(c_1)$ para todo x en el dominio de f.

Los extremos absolutos se denominan también extremos globales:



Ejemplos:

Para $f(x) = sen\,x$, su máximo absoluto es $f\left(\pi/_2\right) = 1$ y su mínimo absoluto es $f\left(3\pi/_2\right) = -1$. Principalmente, pero debido a la periodicidad de la función, esto también ocurre en $x = \pi/_2 + 2n\pi$, $x = 3\pi/_2 + 2n\pi$...

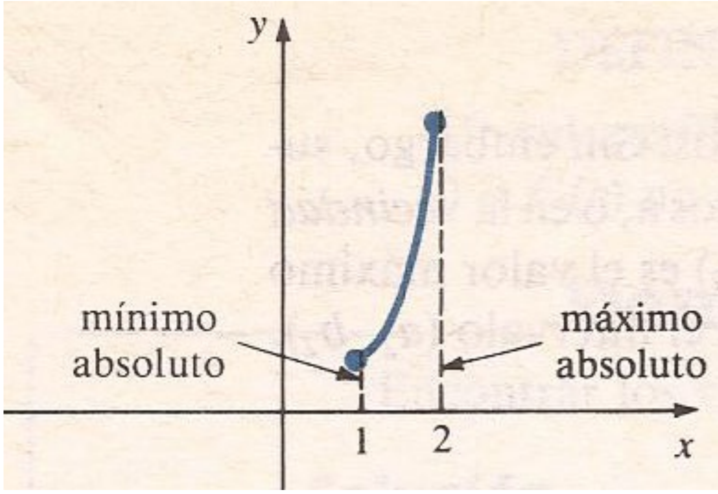
La función $f(x) = x^2$ tiene un mínimo absoluto en $f(0) = 0$ pero no tiene máximo absoluto

La función $f(x) = 1/_x$ no tiene máximo absoluto ni mínimo absoluto

Al considerar los extremos es muy importante el intervalo en el que la función está definida por ejemplo:

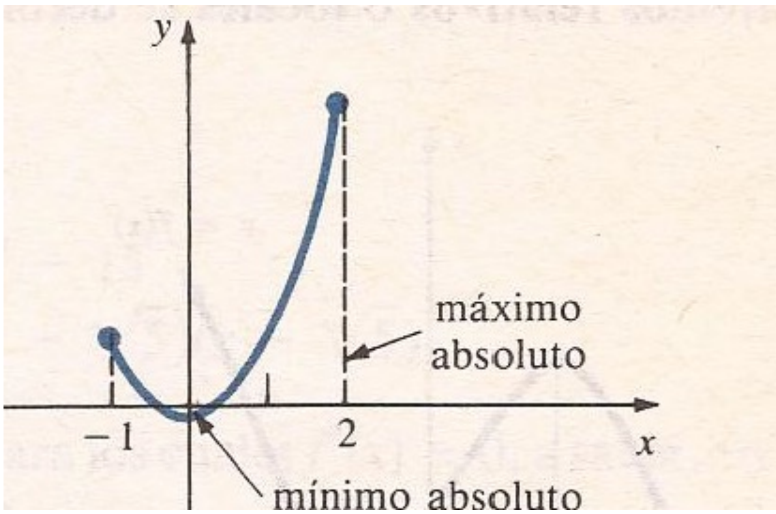
Máximos y Mínimos

Si la función $f(x) = x^2$ está definida solamente en el intervalo cerrado $[1,2]$ tiene un máximo absoluto en $f(2) = 4$ y el mínimo absoluto en $f(1) = 1$, como se muestra en la figura:



Si $f(x) = x^2$ está definida en el intervalo abierto $(1,2)$, entonces f no tiene extremos absolutos, en este caso $f(1)$ y $f(2)$ no están definidas.

Si $f(x) = x^2$ está definida en $[-1,2]$, tiene el máximo absoluto en $f(2) = 4$ pero ahora el mínimo absoluto es $f(0) = 0$, como se muestra en la siguiente figura:



Máximos y Mínimos

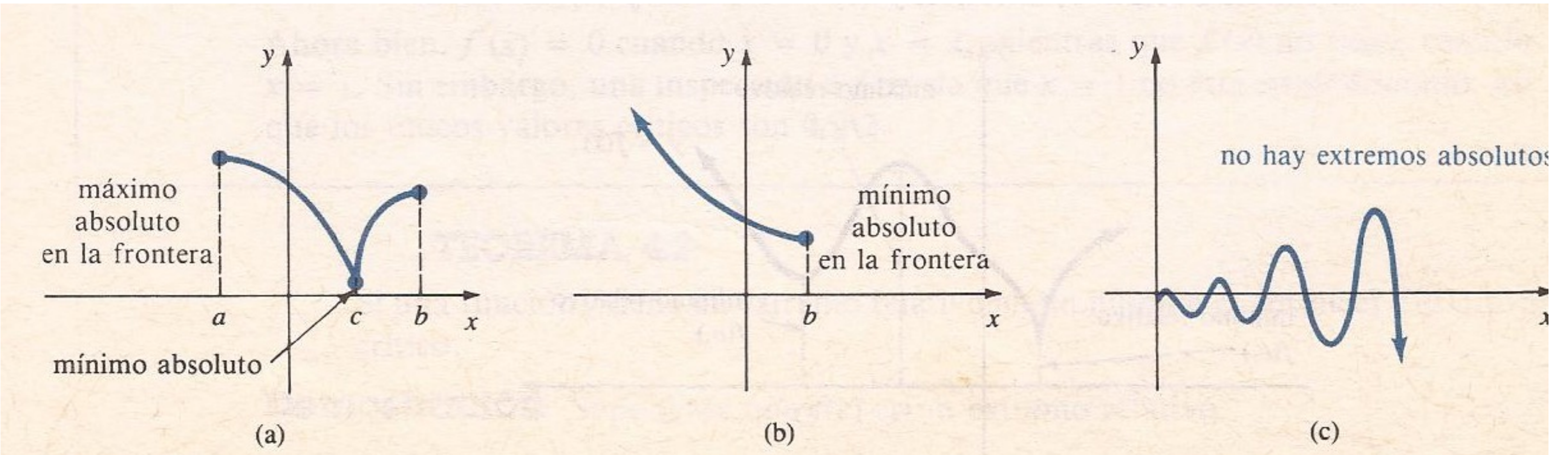
TEOREMA DE LOS VALORES EXTREMOS

Una función f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ siempre tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en el intervalo.

Es decir, cuando f es continua en $[a, b]$, existen números $f(c_1) y\ f(c_2)$ tales que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para todo x en $[a, b]$.

EXTREMOS EN LA FRONTERA

Cuando un extremo absoluto de una función ocurre en una de las fronteras de un intervalo, como en las partes a y c de l función $f(x) = x^2$, se dice que es un extremo en la frontera. Aún cuando la función sea continua, no hay garantía de que exista un extremo absoluto.

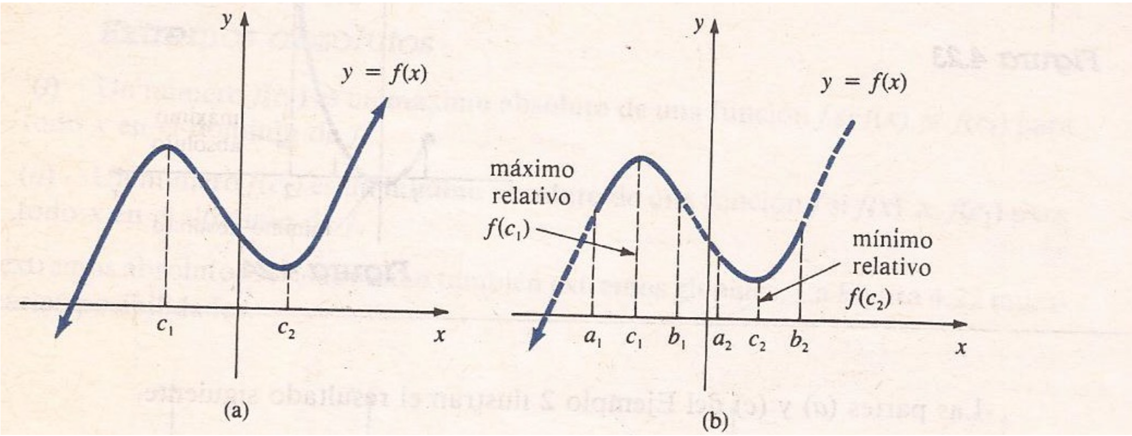


Máximos y Mínimos

EXTREMOS RELATIVOS

La función descrita en la gráfica “a” no tiene extremos absolutos, pero si centramos la atención en los valores de x que están cercanos al punto a, o en la vecindad de c1 y c2, como se muestra en la gráfica “b”

$f(c_1)$ es el valor máximo de la función en el intervalo (a_1, b_1) y $f(c_2)$ es un valor mínimo en el intervalo (a_2, b_2). Estos extremos relativos o locales se definen a continuación:

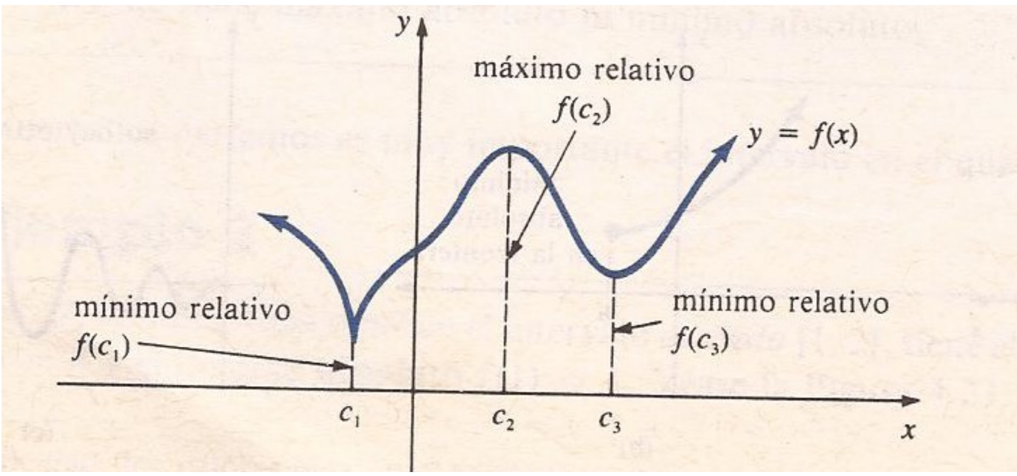


Un número $f(c_1)$ es un máximo relativo de una función, si $f(x) \leq f(c_1)$ para todo x en algún intervalo abierto que contenga a c1.

Un número $f(c_1)$ es un mínimo relativo de una función, si $f(x) \leq f(c_1)$ para todo x en algún intervalo abierto que contenga a c1.

Todo extremo absoluto, con la excepción de un extremo en la frontera, está excluido como extremo relativo, con base en el hecho técnico de que un intervalo abierto contenido en el dominio de la función no puede encontrarse alrededor de un punto frontera del intervalo.

Si en el valor de c hay un extremo relativo, entonces $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ *no existe*.



Máximos y Mínimos

Un valor crítico de una función es un número c en su dominio para el cual $f'(c) = 0$ ó $f'(c)$ *no existe*

Ejemplos:

Encontrar los valores críticos de $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 15x + 6}$

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 15}$

Obtenemos la primera derivada

$\boldsymbol{= 3\,(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})}$

Factorizamos la derivada y los valores críticos son aquellos números para los cuales f´(x) = 0, es decir:

$\boldsymbol{= -\sqrt{5} \quad y\, \sqrt{5}}$

Encontrar los valores críticos de $\boldsymbol{f(x) = (x + 4)^{2/3}}$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{2}{3}(x + 4)^{-1/3}}$

Obtenemos la primera derivada

$$\boldsymbol{= \frac{2}{3(x + 4)^{1/3}}}$$

En este caso, la derivada de la función no existe cuando $x = -4$; debido a que este no esta en el dominio de la función; por lo cual es un valor crítico

Encontrar los valores críticos de $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x-1}}$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{(x-1)[2x] - (x^2)[1]}{(x-1)^2}}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Obtenemos la primera derivada

La derivada de la función es igual a cero en los valores de $x = 0$ y $x = 2$ y no existe cuando $x = 1$, por lo cual no está dentro del dominio de la función; por lo que los valores críticos son: 0 y 2.

EXTREMOS ABSOLUTOS

Si la función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces un extremo absoluto ocurre en un punto frontera del intervalo o en un valor crítico en el intervalo abierto (a, b). Para encontrar el extremo absoluto de una función se requiere:

Evaluar la función en a y en b

Determinar todos los valores críticos en (a, b)

Evaluar la función en los valores críticos

El más grande y el más pequeño de los valores de la lista son el máximo absoluto y el mínimo absoluto en el intervalo $[a, b]$

Ejemplo:

Encontrar los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$ en a)$[-3,1]$, b) $[-3,8]$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$$
$$= 3\,(x+2)(x-4)$$

Máximos y Mínimos

Los valores críticos de la función son $-2\ y\ 4$

En $[-3,1]$

x	-3	-2	1
f(x)	20	30	-24

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$$

$$f(-3) = (-3)^3 - 3(-3)^2 - 24(-3) + 2 = -27 - 27 + 72 + 2 = 20$$

El máximo absoluto de la función esta en $f(-2) = 30$ y el mínimo absoluto en frontera $f(1) = -24$

$$[-3,8]$$

x	-3	-2	4	8
f(x)	20	30	-78	130

El mínimo absoluto esta en $f(4) = -78$ y en $f(8) = 130$ es un máximo absoluto en la frontera.