

TRIÁNGULOS, RECTÁNGULOS Y OBLICUÁNGULOS

Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conoce un lado y un ángulo:

Para dar solución; es decir, encontrar los valores restantes, hay que saber cuáles son las cantidades que se tienen. De antemano sabemos que, al ser un triángulo rectángulo, uno de los ángulos es de 90° y el otro es la cantidad que se entrega. Por ello, para calcular el 3er ángulo, sumamos el valor del ángulo conocido más los 90° y el resultado se lo restamos a 180° .

Una vez que se tienen los tres ángulos, se utilizan las funciones trigonométricas (sen, cos o tan) para calcular el valor de cada lado faltante. Por ejemplo:

- ✓ Si conocemos un cateto, para calcular el siguiente cateto se puede utilizar la tangente ($\tan(\theta)$), ya que esta involucra la razón entre los catetos y el ángulo entre ellos, y la función seno($\sin(\theta)$) o coseno($\cos(\theta)$) para calcular la hipotenusa.
- ✓ Si conocemos la hipotenusa, podemos utilizar las funciones $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ para calcular los valores de los catetos.

TRIÁNGULOS, RECTÁNGULOS Y OBLICUÁNGULOS

Ejemplo: Resolver el triángulo rectángulo con $h=14.6$ y $\theta = 33.2^\circ$.

Solución:

1. Buscamos el valor para el ángulo faltante.

$$\theta = 33.2$$

$$\gamma = 90 \quad 180 - (90+33.2) = 56.8^\circ$$

$$\alpha = \text{¿?}$$

2. Para calcular el cateto opuesto utilizamos $\text{sen}(\theta)$.

$$\sin \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{CO}{14.6}$$

- 2.1. Se despeja la expresión para obtener el valor del CO.

$$\begin{aligned} \sin(33.2) &= \frac{CO}{14.6} \\ (14.6) \sin(33.2) &= CO \end{aligned}$$

- 2.2. Se resuelve para CO.

$$(14.6)(0.5476) = 7.99 = CO$$

3. Para calcular el cateto adyacente utilizamos $\text{cos}(\theta)$.

$$\cos \theta = \frac{CA}{\text{hipotenusa}} = \frac{CA}{14.6}$$

- 3.1. Despejamos y resolvemos igual que para sen.

$$\begin{aligned} \cos(33.2) &= \frac{CA}{14.6} \\ (14.6)(0.8368) &= 12.2 = CA \end{aligned}$$

Resolución de triángulos rectángulos cuando se conocen dos lados:

Nuevamente aquí tenemos que identificar lo que se tiene para poder calcular los ángulos y el lado faltantes.

TRIÁNGULOS, RECTÁNGULOS Y OBLICUÁNGULOS

Ejemplo: resolver el triángulo que tiene los siguientes valores para un cateto y la hipotenusa.

$$a = 42.8 \text{ y } h = 103$$

Solución:

1. Calcular el ángulo faltante, para ello podemos usar $\sin \theta$.

$$\sin \theta = \frac{CO}{hipotenusa} = \frac{42.8}{103} = 0.41553398$$

$$\theta = \sin^{-1} 0.41553398 = 24.55^\circ$$

2. Ahora podemos calcular el 3er ángulo.

$$180 - (90 + 24.55) = 65.5^\circ$$

3. El cateto faltante lo podemos calcular con el teorema de Pitágoras o con una función trigonométrica, para este ejemplo usaremos $\cos \theta$.

$$\cos(24.55) = \frac{CA}{hipotenusa} = \frac{CA}{103}$$

- 3.1. Despejamos para obtener el cateto adyacente.

$$(103)(\cos(24.55)) = CA = (103)(0.9096) = 93.69$$

Triángulos oblicuángulos:

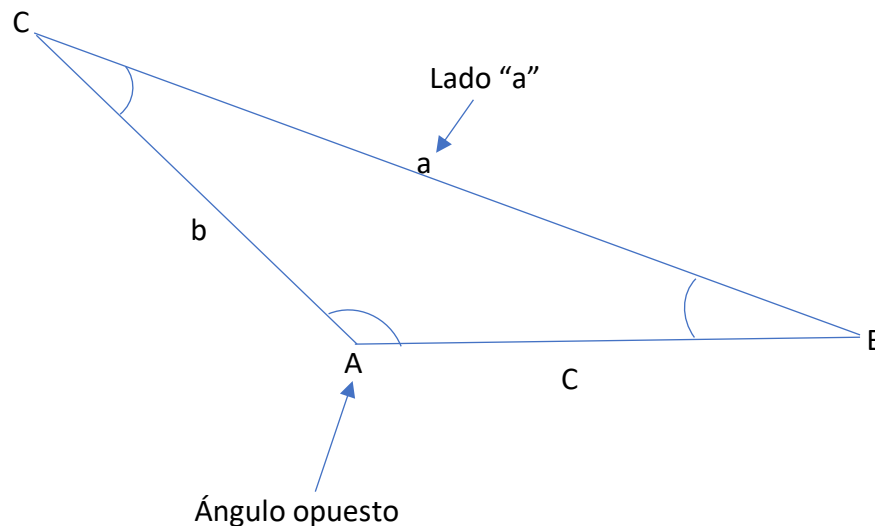
Este tipo de triángulos son los que no tienen ángulos rectos, para resolverlos, necesitamos conocer tres de cualesquiera de sus elementos, exceptuando los tres ángulos.

1. Conocer un lado y dos ángulos.
2. Conocer dos lados y el ángulo opuesto a uno de los lados.
3. Conocer dos lados y el ángulo entre ellos.
4. Conocer los tres lados.

TRIÁNGULOS, RECTÁNGULOS Y OBLICUÁNGULOS

Para determinar los triángulos oblicuángulos, además de que se cumpla uno de los casos anteriores, se deben utilizar una de dos leyes, la de los senos o la de los cosenos.

Ley de los Senos: en ella se define que, para todo triángulo, el valor de sus lados es proporcional a los senos de los ángulos opuestos.



Podemos expresar la ley de los senos de la siguiente manera:

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}$$

Los casos en los que se puede utilizar esta ley son los siguientes: el 1 y 2, veamos un ejemplo de cada uno de ellos.

TRIÁNGULOS, RECTÁNGULOS Y OBLICUÁNGULOS

Caso 2 (dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos):

Resolver el triángulo ABC, sabiendo que $c=628$, $b=480$ y $C=55^\circ$

Solución: sabemos que se trata del caso 2 porque conocemos 2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

1. Acomodamos los datos que se conocen.

$$\frac{a}{\text{sen}(A)} = \frac{480}{\text{Sen}(B)} = \frac{628}{\text{Sen}(55)}$$

2. Observando las relaciones vemos que se puede calcular el ángulo B.

$$\frac{480}{\text{Sen}(B)} = \frac{628}{\text{Sen}(55)}$$

Despejamos

$$\sin B = \frac{480(\sin 55)}{628} = \frac{(480)(0.8208)}{628} = 0.6274$$

Para obtener B despejamos SEN, quedando

$$B = \sin^{-1}(0.6274) = 38^\circ 50'$$

3. Conocidos dos ángulos podemos calcular el tercero que es A.

$$A = 180 - (38^\circ 50' + 55) = 86^\circ 10'$$

4. Por último, calculamos el valor del lado a.

$$a = \frac{(480)(\text{sen } 86^\circ 10')}{\text{sen}(38^\circ 50')} = \frac{(480)(0.9929)}{0.6271} = 759.99$$

Ley de los Cosenos: En todo triángulo ABC, el cuadrado de un lado es igual a la suma del cuadrado de los otros dos lados, menos el doble producto de dichos lados multiplicados por el coseno del ángulo comprendido.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

Y de los casos ya presentados, tomamos el 3 y 4 que son los que se pueden resolver por esta ley.

TRIÁNGULOS, RECTÁNGULOS Y OBLICUÁNGULOS

Caso 3 (dos lados y el ángulo entre ellos):

Resolver el triángulo ABC, sabiendo que $a=132$, $b=224$ y $C=28^\circ 40'$

Solución: una vez identificado el caso 3, donde tenemos 2 lados y el ángulo entre ellos, procedemos a resolver los elementos faltantes, que son el lado c y los ángulos A y B .

1. Podemos calcular el lado C .

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Sustituimos y resolvemos.

$$c^2 = 132^2 + 224^2 - 2(132)(224) \cos(28^\circ 40')$$

$$c^2 = 17424 + 50176 - (59136)(0.8774)$$

$$c^2 = 15714.0736$$

$$c = \sqrt{15714.0736} = 125.3558$$

2. Ahora como ya conocemos los 3 lados y un ángulo, podemos usar a ley de los SENOS para calcular otro de los ángulos.

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}$$
$$\frac{132}{\text{sen } A} = \frac{224}{\text{Sen } B} = \frac{125.3558}{\text{Sen } (28^\circ 40')}$$

$$\frac{132}{\text{sen } A} = \frac{125.3558}{\text{Sen } (28^\circ 40')}$$

$$\frac{132}{\text{sen } A} = \frac{125.3558}{0.4797}$$

$$\text{sen } A = \frac{(132)(0.4797)}{125.3558} = 0.5051$$

$$A = \sin^{-1}(0.5051) = 30.33 = 30^\circ 22'$$

3. Por último, calculamos el ángulo faltante B .

$$B = 180^\circ - (28^\circ 40' + 30^\circ 22') = 120^\circ 58'$$

TRIÁNGULOS, RECTÁNGULOS Y OBLICUÁNGULOS

Caso 4 (Conocer los 3 lados):

Resolver el triángulo ABC sabiendo que $a=132$, $b=224$ y $c= 125.3558$

Solución: sabemos que es el caso 4 porque solo conocemos los valores de los lados.

Nota: este problema toma los datos del anterior a propósito para comprobar que los cálculos son correctos.

1. Podemos calcular el ángulo A.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Sustituimos y resolvemos.

$$(132)^2 = 224^2 + 125.3558^2 - 2(224)(125.3558) \cos A$$

$$17424 = 50176 + 15714.0766 - (56159.40) \cos A$$

$$17424 = 65890.0766 - (56159.40) \cos A$$

$$17424 - 65890.0766 = -(56159.40) \cos A$$

$$-48466.0766 = -(56159.40) \cos A$$

$$\frac{-(48466.0766)}{-(56159.40)} = \cos A$$

$$0.8630 = \cos A$$

$$\cos^{-1}(0.8630) = A$$

$A = 30^\circ 20'$ (como es una igualdad, podemos invertir los términos)

2. De igual forma calcularemos el ángulo B.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$224^2 = 132^2 + 125.3558^2 - 2(132)(125.3558) \cos B$$

$$50176 = 33138.0766 - (33093.9312) \cos B$$

$$\cos B = \frac{17037.9234}{-33093.9312} = -0.5148$$

$$B = \cos^{-1}(-0.5148) = 120^\circ 59'$$

3. Por último, calculamos el ángulo faltante C.

$$C = 180^\circ - (30^\circ 20' + 120^\circ 59') = 28^\circ 41'$$