Distribución Discreta de Probabilidad Binominal

En estadística, la distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que cuenta el número de éxitos en una secuencia de n ensayos de Bernoulli independientes entre sí, con una probabilidad fija p de ocurrencia del éxito entre los ensayos.

Algunos experimentos consisten en la observación de una serie de pruebas idénticas e independientes, los cuales pueden generar uno de dos resultados. Por ejemplo:

- Un fusible que sale de una línea de producción se puede clasificar como defectuoso o no defectuoso.
- En una serie de disparos al blanco, cada tiro puede resultar un éxito o un fracaso.
- En una encuesta para la elección local, cada persona interrogada estará a favor o en contra del candidato de cierto partido.

Características de un experimento binomial:

1. El experimento consiste de n pruebas (intentos) idénticos.

2. Cada prueba (intento) tiene dos resultados posibles: éxito o fracaso.

3. Las n pruebas (intentos) son independientes.

4. La probabilidad de éxito permanece constante de una prueba (o intento) a otra.

La variable aleatoria X es el número de éxitos observados en las n pruebas, entendiendo como éxito el resultado de interés para el experimento y no necesariamente un "buen" evento. En un experimento binomial con n pruebas (o intentos), los posibles resultados son x = 0, 1, 2, . . . , n. La distribución de probabilidad para esta variable aleatoria se denomina distribución binomial.

Distribución Discreta de Probabilidad Binominal

Uso de la fórmula de probabilidad binomial

En una distribución de probabilidad binomial, las probabilidades pueden calcularse mediante la fórmula de probabilidad binomial

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x q^{n-x}$$

Para $x = 0,1,2,\ldots n$

Donde:

n= número de ensayos.

x = número de éxitos en n ensayos.

p = probabilidad de éxito en cualquier ensayo.

q = probabilidad de fracaso en cualquier ensayo (q = 1-p).

Nota: el símbolo factorial representa el producto de factores decrecientes, por ejemplo:

3! = 3*2*1 = 6

4! = 4*3*2*1 = 24

1! = 1

0! = 1 (por definición)

Ejemplo: suponiendo que la probabilidad de que un guisante tenga vainas verdes es 0.75, utiliza la fórmula de la probabilidad binomial para calcular la probabilidad de obtener exactamente 3 guisantes con vainas verdes cuando se generan 5 vástagos de guisantes. Es decir, calcula P(3) dado que $n = 5$, $x = 3$, $p = 0.75$ y $q = 0.25$.

Al emplear los valores dados de n, x, p y q en la fórmula de probabilidad binomial, obtenemos:

$$P(3) = \frac{5!}{(5-3)!\,3!}0.75^3 0.25^{5-3}$$

$$P(3) = \frac{5!}{2!\,3!}(0.421875)(0.0625)$$

$$P(3) = (10)(0.421875)(0.0625) = 0.263671875$$

Es decir, la probabilidad de obtener exactamente 3 guisantes con vainas verdes de un total de 5 vástagos es 0.264.

Fundamentos de la fórmula de probabilidad binomial

La fórmula de probabilidad binomial se puede utilizar para calcular la probabilidad de obtener exactamente 3 guisantes con vainas verdes cuando se generan 5 vástagos. P(vaina verde) = 0.75, se puede calcular utilizando la regla de la multiplicación para calcular la probabilidad de que los primeros 3 guisantes tengan vainas verdes y los últimos 2 guisantes no tengan vainas verdes. Obteniendo el siguiente resultado:

P(3 guisantes con vainas verdes, seguidos de 2 guisantes con vainas que no sean verdes).

= (0.75)(0.75)(0.75)(0.25)(0.25)

= $(0.75^3)(0.25^2)$

=0.0264

Este resultado da una probabilidad de generar 5 vástagos, donde los 3 primeros tengan vainas verdes. Sin embargo, no da la probabilidad de obtener exactamente 3 guisantes con vainas verdes, ya que supone un orden específico para 3 vástagos de guisantes con vainas verdes. Existen otros acomodos posibles para generar 3 vástagos de guisantes con vainas verdes.

Distribución Discreta de Probabilidad Binominal

Por ejemplo con 3 elementos idénticos (como guisantes con vainas verdes) y otros dos sujetos idénticos entre sí (como guisantes sin vainas verdes), el número total de acomodos o permutaciones es $5!/[(5-3)!\,3!]$ o 10. Cada uno de estos 10 acomodos diferentes tiene una probabilidad de $(0.75^3)(0.25^2)$, de manera que la probabilidad total es la siguiente:

P(3 guisantes con vainas verdes de un total de 5) = $\frac{5!}{(5-3)!3!}0.75^3 0.25^2$

Este resultado específico puede generalizarse como la fórmula de probabilidad binomial. Es decir, la fórmula de probabilidad binomial es una combinación de la regla de la multiplicación de probabilidad y la regla de conteo para el número de acomodos de n elementos, cuando x de ellos son idénticos entre sí, y los otros $n-x$ son idénticos entre sí.

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!x!}p^x q^{n-x}$$

El número de resultados con exactamente x éxitos en n ensayos.

La probabilidad de x éxitos en n ensayos, para cualquier orden.

Referencia:

Triola, M., 2004, Probabilidad y Estadística: Pearson Educación.