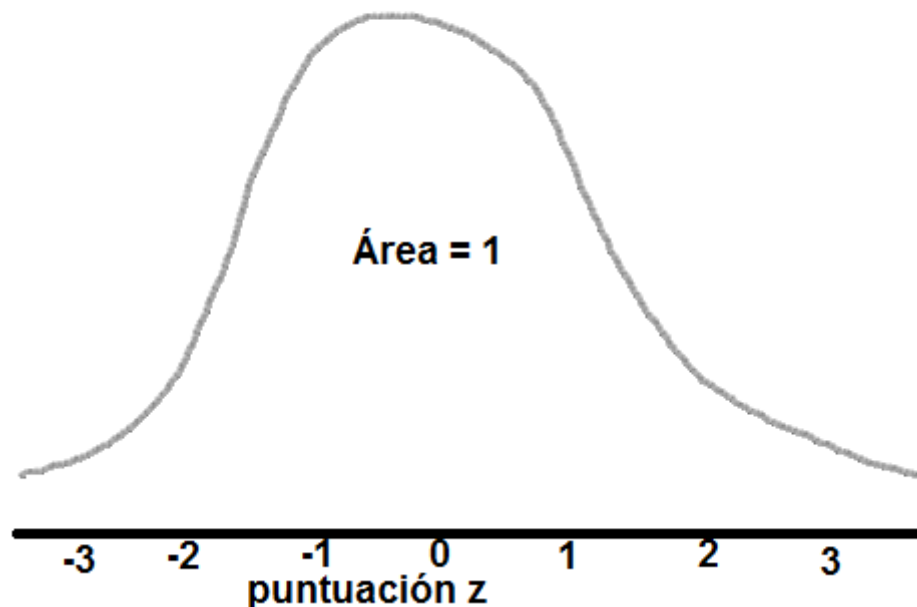


La Distribución Normal Estándar

La función de una distribución uniforme es una línea horizontal, de manera que es fácil calcular el área de cualquier región rectangular aplicando la siguiente fórmula: Área = anchura x altura. Debido a que la función de densidad de una distribución normal tiene una forma de campana más complicada, es más difícil calcular áreas, pero el principio básico es el mismo: existe una correspondencia entre área y probabilidad.

En la figura:

Imagen elaborada por Elsa Rivera (2015), Distribución Normal Estándar.



Se indica que para una distribución normal estándar, el área bajo la función de densidad es igual a 1.

La Distribución Normal Estándar

Definición: La distribución normal estándar es una distribución normal de probabilidad con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, y el área total debajo de su función de densidad es igual a 1.

Como no es fácil calcular áreas en la figura de la distribución normal, los matemáticos han calculado muchas áreas diferentes bajo la curva, las cuales se incluyen en la tabla de la distribución normal estándar.

Cálculo de probabilidades con puntuaciones z dadas.

Si empleamos la tabla de la distribución normal estándar, podemos calcular áreas (o probabilidades) para muchas regiones diferentes. Tales áreas pueden determinarse utilizando una calculadora o programas de cómputo. Cuando construya una gráfica, evite la confusión entre las puntuaciones z y las áreas:

Puntuación z: distancia a lo largo de la escala horizontal de la distribución normal estándar.

Área: Región bajo la curva.

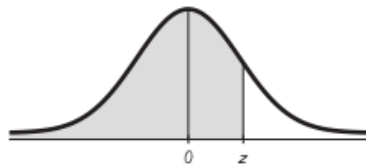
EJEMPLO:

La Precision Scientific Instrument Company fabrica termómetros que, se supone, deben dar lecturas de 0°C en el punto de congelación del agua. Las pruebas de una muestra grande de estos instrumentos revelaron que en el punto de congelación del agua, algunos termómetros daban lecturas por debajo de 0°C (denotadas con números negativos), y otros daban lecturas por encima de 0°C (denotadas con números positivos). Suponga que la lectura media es 0°C y que la desviación estándar de las lecturas es 1.00°C . También suponga que las lecturas se distribuyen de manera normal. Si se elige al azar un termómetro, calcule la probabilidad de que, en el punto de congelación del agua, la lectura sea menor que 1.27°C .

Solución:

La distribución de probabilidad de las lecturas es una distribución normal estándar, ya que las lecturas se distribuyen de forma normal, con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Necesitamos encontrar el área que está debajo de $z=1.27$. El área por debajo de $z=1.27$ es igual a la probabilidad de seleccionar al azar un termómetro con una lectura menor que 1.27°C . En la tabla de la distribución normal estándar encontramos que esta área es 0.8980.

La Distribución Normal Estándar



Puntuaciones z POSITIVAS

TABLA A-2 (continuación) Área acumulativa desde la IZQUIERDA

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177

Imagen tomada de Triola, M., 2004, Probabilidad y Estadística, Pearson Educación.

Interpretación: La probabilidad de seleccionar al azar un termómetro con una lectura menor que 1.27°C (en el punto de congelación del agua) es igual al área de 0.8980. Otra forma de interpretar este resultado es concluir que el 89.8% de los termómetros tendrán lecturas por debajo de 1.27°C .

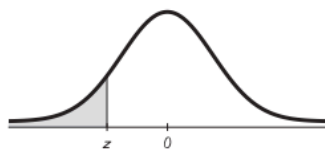
Ejemplo:

Considerando los termómetros del ejemplo anterior, calcula la probabilidad de seleccionar al azar un termómetro con una lectura (en el punto de congelación del agua) por arriba de -1.23°C .

Solución:

Nuevamente calculamos la probabilidad deseada encontrando el área correspondiente. Hay que considerar que la tabla de la distribución normal estándar está diseñada para aplicarse únicamente a áreas acumuladas desde la izquierda. Si nos remitimos a la tabla de la distribución normal estándar, en la página de puntuaciones negativas:

La Distribución Normal Estándar



Puntuaciones z NEGATIVAS

TABLA A-2 Distribución normal estándar (z): Área acumulativa desde la IZQUIERDA

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.50 y menores	.0001									
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170

Imagen tomada de Triola, M., 2004, Probabilidad y Estadística, Pearson Educación.

Encontramos que el área acumulada de la izquierda hasta $z = -1.23$ es 0.1093. Sabiendo que el área total bajo la curva es 1, podemos calcular el área sombreada si restamos 0.1093 de 1. El resultado es 0.8907.

Interpretación: Debido a la correspondencia entre probabilidad y área, podemos concluir que la probabilidad de seleccionar aleatoriamente un termómetro con una lectura por arriba de -1.23°C , en el punto de congelación del agua, es de 0.8907 (que corresponde al

La Distribución Normal Estándar

área a la derecha de $z=-1.23$). En otras palabras, el 89.07% de los termómetros tienen lecturas por encima de -1.23°C .

Ejemplo: Realiza una selección aleatoria de la misma muestra de termómetros del primer ejemplo de la sección y calcula la probabilidad de que el termómetro elegido arroje lecturas (en el punto de congelación del agua) entre -2°C y 1.5°C

Solución:

Nuevamente tratamos con los valores distribuidos de manera normal, con una media de 0°C y una desviación estándar de 1°C . La probabilidad de seleccionar un termómetro con una lectura comprendida entre -2°C y 1.5°C corresponde al área en un intervalo, por lo que se calcula para $z = 1.5$ corresponde el área de 0.9332 y para $z = -2$ corresponde al área de 0.0228. Entonces se hace una diferencia entre 0.9332 y 0.0228. El área es por lo tanto $0.9332-0.0228=0.9104$.

Interpretación:

Considerando la correspondencia entre probabilidad y área, concluimos que existe una probabilidad de 0.9104 de seleccionar al azar uno de los termómetros con una lectura entre -2°C y 1.5°C , en el punto de congelación del agua. Otra forma de interpretar estos resultados es afirmar que si se seleccionan muchos termómetros para probarlos en el punto de congelación del agua, entonces 0.9104 (o el 91.04%) de ellos tendrán lecturas entre -2°C y 1.5°C .

El ejemplo anterior puede generalizarse como la siguiente regla: el área correspondiente a la región localizada entre dos puntuaciones z específica puede obtenerse al calcular la diferencia entre las dos áreas localizadas en la tabla de la distribución normal estándar.

La Distribución Normal Estándar

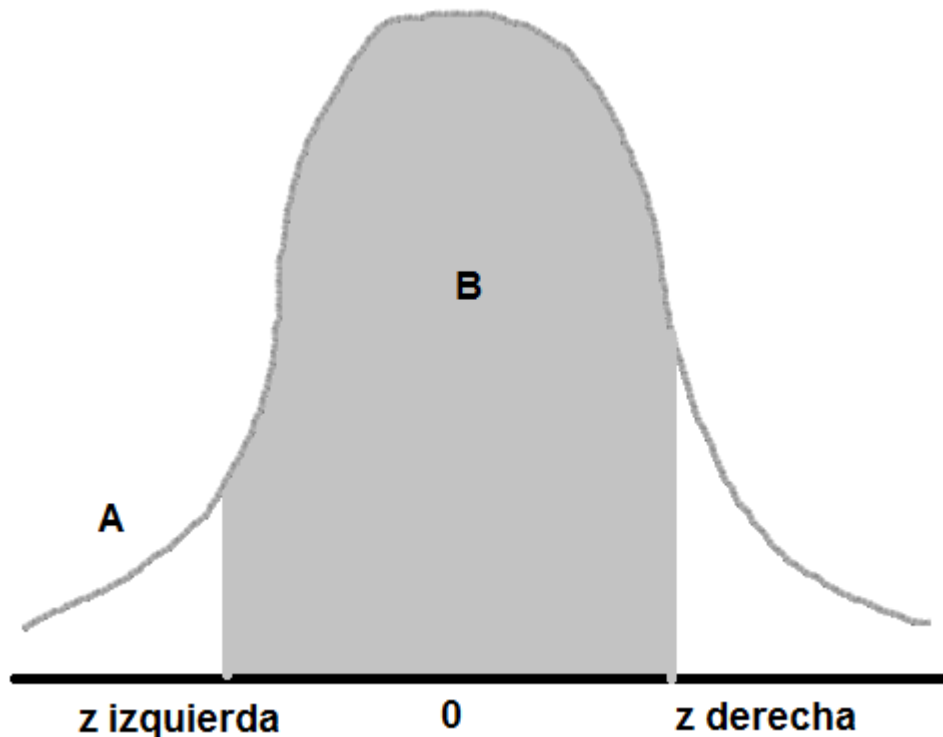


Imagen elaborada por Elsa Rivera (2015), Cálculo de área entre dos puntuaciones.

$$\begin{aligned}\text{Área sombreada B} &= (\text{áreas A y B combinadas}) - (\text{área A}) \\ &= (\text{área de la tabla usando } z \text{ derecha}) - (\text{área de la tabla usando } z \text{ izquierda})\end{aligned}$$

Notación:

$P(a < z < b)$ denota la probabilidad de que la puntuación z esté entre a y b .

$P(z > a)$ denota la probabilidad de que la puntuación z sea mayor que a .

$P(z < a)$ denota la probabilidad de que la puntuación z sea menor que a .

La Distribución Normal Estándar

Con esta notación podemos expresar el resultado del ejemplo anterior de la siguiente manera: $P(-2 < z < 1.5) = 0.9104$, lo cual establece en símbolos que la probabilidad de que una puntuación z caiga entre -2 y 1.5 es de 0.9104 . Con una distribución de probabilidad continua, tal como la distribución normal, la probabilidad de obtener cualquier valor exacto es 0 . Es decir, $P(z = a) = 0$. Por ejemplo, existe una probabilidad 0 de seleccionar al azar a una persona cuya estatura sea exactamente de 68.12345678 pulgadas. En la distribución normal, cualquier punto único sobre la escala horizontal está representado, no por una región bajo la curva, sino por una línea vertical por arriba del punto. Para $P(z = 1.5)$ tenemos una línea vertical que está por arriba de $z = 1.5$, pero esta línea vertical, por sí misma, no contiene un área, de manera que $P(z = 1.5) = 0$. Para cualquier variable aleatoria continua, la probabilidad de un valor exacto es cero, y se infiere que $P(a \leq z \leq b) = P(a < z < b)$. También se deduce que la probabilidad de obtener una puntuación z de a sumo b es igual a la probabilidad de obtener una puntuación z menor que b . Es importante interpretar correctamente frases clave como a lo sumo, al menos, más que, no más que, etcétera.

Cálculo de puntuaciones z de áreas conocidas.

Hasta ahora, los ejemplos vistos que implican la distribución normal estándar han seguido el mismo formato: dadas las puntuaciones z , calculamos área bajo la curva; estas áreas corresponden a probabilidades. En muchos otros casos, nos enfrentaremos al proceso inverso: conocemos el área (o probabilidad), pero necesitamos calcular la puntuación z correspondiente. En tales casos es muy importante evitar una confusión entre las puntuaciones z y las áreas. Recuerda, las puntuaciones z son distancias a lo largo de la escala horizontal, mientras que las áreas (o probabilidades) son regiones bajo la curva. Además, las puntuaciones z ubicadas a la mitad izquierda de la curva siempre son negativas. Si ya conocemos una probabilidad y deseamos determinar la puntuación z correspondiente, la calculamos de la siguiente forma:

La Distribución Normal Estándar

Procedimiento para el cálculo de una puntuación z a partir de un área conocida.

1. Dibuja una curva en forma de campana e identifica la región bajo la curva que corresponde a la probabilidad dada. Si no se trata de una región acumulada desde la izquierda, trabaja con una región acumulada conocida que inicia desde la izquierda.
2. Usando el área acumulada de la izquierda, localiza la probabilidad más cercana en el cuerpo de la tabla de distribución normal estándar e identifica la puntuación z correspondiente.

Cuando te remitas a la tabla de la distribución normal estándar, recuerda que el cuerpo de la tabla proporciona áreas acumuladas desde la izquierda.

Ejemplo:

Considera los mismo termómetros de un ejemplo anterior, con lecturas de temperatura en el punto de congelación del agua distribuidas normalmente, con una media de 0°C y una desviación estándar de 1°C . Calcula la temperatura correspondiente a P_{95} , el percentil 95. Es decir, calcule la temperatura que separa el 95% inferior del 5% superior.

La Distribución Normal Estándar

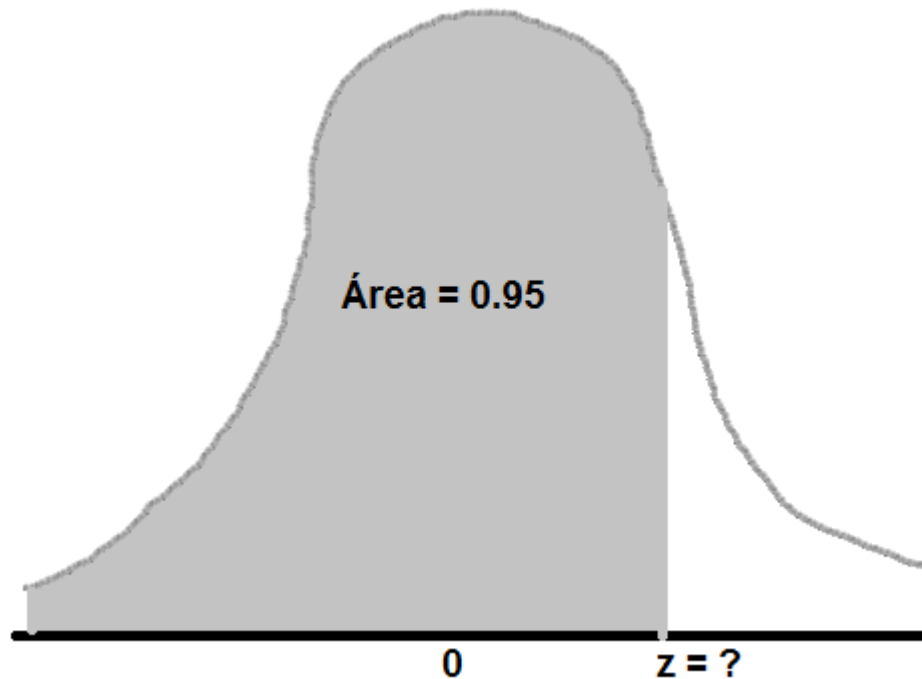


Imagen elaborada por Elsa Rivera (2015), Cálculo del percentil 95.

Solución. La figura anterior incluye la puntuación z que corresponde al percentil 95, con el 95% del área (o 0.95) por debajo de ella. Al remitirnos a la tabla de la distribución normal estándar buscamos el área de 0.95 en el cuerpo de la tabla y después buscamos la puntuación z correspondiente. En la tabla de la distribución normal estándar encontramos el área de 0.95 que corresponde a una puntuación de z de 1.645. Ahora podemos concluir que la puntuación z en la

figura anterior es 1.645, por lo que el percentil 95 es la lectura de temperatura correspondiente a 1.645°C .

Interpretación: al probar los termómetros a la temperatura de congelación, el 95% de las lecturas serán menores que, o iguales a 1.645°C y el 5% de ellas serán mayores que, o iguales a 1.645°C .

La Distribución Normal Estándar

Nota que en la solución del problema anterior, la tabla de la distribución normal estándar, indicó una puntuación z de 1.645, que está a la mitad de 1.64 y 1.65. Con la tabla de la distribución normal estándar, generalmente podemos evitar la interpolación si tan solo seleccionamos el valor más cercano. Existen casos especiales, listados en la tabla adjunta, los cuales son importantes ya que se utilizan con frecuencia en una amplia variedad de aplicaciones.

Casos Especiales:

Puntuación z	Área acumulada desde la izquierda
1.645	0.95
-1.645	0.05
2.575	0.995
-2.575	0.005
Mayor que 3.49	0.9999
Menor que -3.49	0.0001

En uno de esos casos especiales, el valor de $z = 2.576$ da un área ligeramente más cercana a la de 0.995, pero $z = 2.575$ tiene la ventaja de ser el valor intermedio entre $z = 2.57$ y $z = 2.58$. Con la excepción de estos casos especiales, podemos seleccionar el valor más cercano en la tabla (si un valor deseado se encuentra entre dos valores de la tabla, selecciona el valor más grande). Además, para las puntuaciones z por arriba de 3.49, podemos utilizar 0.9999 como aproximación al área acumulada a partir de la izquierda; para puntuaciones z por debajo de -3.49, podemos utilizar 0.0001 como aproximación del área acumulada a partir de la izquierda.

La Distribución Normal Estándar

Ejemplo:

Considera los mismos termómetros de ejemplos anteriores y calcula las temperaturas que separan el 2.5% inferior y el 2.5% superior.

Solución: La figura

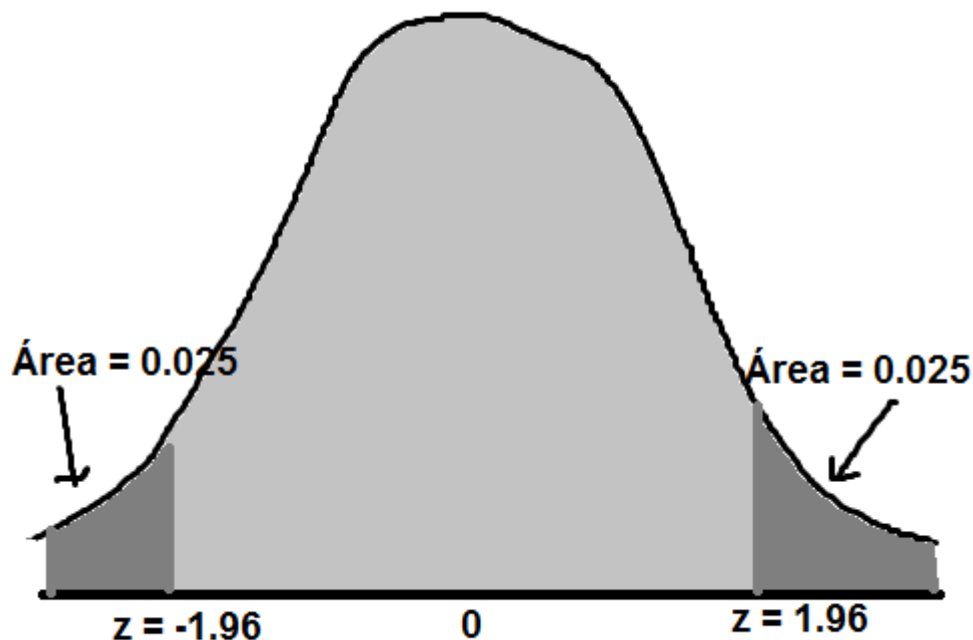


Imagen elaborada por Elsa Rivera (2015), Cálculo de puntuaciones z .

Presenta las puntuaciones z requeridas. Para encontrar la puntuación z localizada a la izquierda, hay que remitirse a la tabla de la distribución normal estándar y busca el área de 0.025 en el cuerpo de la tabla. El resultado es $z = -1.96$. Para encontrar la puntuación z localizada a la derecha, remítete al cuerpo de la tabla y busca el área de 0.975. (Recuerda que la tabla de la distribución normal estándar siempre da áreas acumuladas a partir de la izquierda). El resultado es $z = 1.96$. Los valores de $z = -1.96$ y $z = 1.96$ separan el 2.5% inferior y el 2.5% superior, como se observa en la figura anterior.

La Distribución Normal Estándar

Interpretación: al probar los termómetros a la temperatura de congelación, el 2.5% de las lecturas serán iguales o menores que -1.96°C , y el 2.5% de las lecturas serán iguales o mayores que 1.96°C . Otra interpretación es que, en el punto de congelación del agua, el 95% de todas las lecturas de los termómetros se ubicarán entre -1.96°C y 1.96°C .

Valores críticos. Para una distribución normal, un **valor crítico** es una puntuación z en el límite que separa a las puntuaciones z probable de las que son improbables. Algunos valores críticos comunes son $z = -1.96$, los cuales se obtienen como el ejemplo anterior. En este ejemplo es poco probable que ocurran los valores por debajo de $z=-1.96$, ya que solo se presentan en el 2.5% de las lecturas, y es poco probable que ocurran valores por arriba de $z=1.96$ porque también se presentan solo en el 2.5% de las lecturas.

Notación: La expresión z_{α} denota la puntuación z con un área de α a su derecha (α es la letra griega alfa).

Referencia: Triola, M., 2013, Estadística, Pearson Educación.