Ejemplo 1

El volumen de ventas de gasolina de cierta estación de servicio depende del precio por litro. Si p es el precio por litro en centavos, se encuentra que el volumen de venta q (en litros por día) está dado por

$$q = 500\,(150 - p)$$

Calcula el incremento en el volumen de ventas que corresponde a un incremento en el precio de 120 centavos a 130 centavos por litro.

Solución

Aquí, p es la variable independiente y q la función de p. El primer valor de p es $p_1 = 120$ y el segundo valor de p es $p_2 = 130$. El incremento de p es

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 130 - 120 = 10$$

Los valores correspondientes de q son los siguientes:

$$q_1 = 500\,(150 - p_1) = 500(150 - 120) = 15{,}000$$

$$q_2 = 500\,(150 - p_2) = 500(150 - 130) = 10{,}000$$

En consecuencia, el incremento de q está dado por

$$\Delta q = q_2 - q_1 = 10{,}000 - 15{,}000 = -5000$$

El incremento de q mide el crecimiento en q y el hecho de que sea negativo significa que q en realidad decrece. El volumen de ventas decrece en 5000 litros por día si el precio se incrementa de 120 a 130 centavos.

Ejemplo 2 ***(Costos, ingresos y utilidades)***

Un fabricante de productos químicos advierte que el costo por semana de producir x toneladas de cierto fertilizante está dado por $C(x) = 20{,}000 + 40x$ dólares y el ingreso obtenido por la venta de x toneladas está dado por $R(x) = 100x - 0.01x^2$. La compañía actualmente produce 3100 toneladas por semana; pero está considerando incrementar la producción a 3200 toneladas por semana. Calcula los incrementos resultantes en el costo, el ingreso y la utilidad. Determina la tasa de cambio promedio de la utilidad por las toneladas extra producidas.

Solución

El primer valor de x es de 3100 y $x + \Delta x = 3200$:

$$
\begin{aligned}
\Delta C &= C(x + \Delta x) - C(x) \\
&= C(3200) - C(3100) \\
&= [20000 + 40(3200)] - [20000 + 40(3100)] \\
&= 148000 - 144000 \\
&= 4000
\end{aligned}
$$

$$\Delta R = R(\, x + \Delta x) - R(x)$$
$$= R(3200) - R(3100)$$
$$= [100(3200)] - [0.01(3200)^2] -$$
$$[100(3100)] - [0.01(3100)^2]$$
$$= 217600 - 213900$$
$$= 3700$$

De modo que los costos se incrementan en $\$4000$ con el incremento dado en la producción, mientras los ingresos se incrementan en $\$3700$.

A partir de estos resultados, es claro que la utilidad debe decrecer en $\$300$.

Podemos advertir esto con más detalle si consideramos que las utilidades obtenidas por la empresa son iguales a sus ingresos menos sus costos, de modo que la utilidad $P(x)$ por la venta de x toneladas de fertilizante es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$
$$= 100x - 0.01x^2 - (20{,}000 + 40x)$$
$$= 100x - 0.01x^2 - 20{,}000 - 40x$$
$$= 60x - 0.01x^2 - 20{,}000$$

En consecuencia, el incremento en la utilidad cuando x cambia de 3100 a 3200 es

$$\Delta P = P(3200) - P(3100)$$

$$= [60(3200) - 0.01(3200)^2 - 20{,}000] - [60(3100) - 0.01(3100)^2 - 20{,}000]$$

$$= 69{,}600 - 69{,}900 = -300$$

Así, la utilidad decrece en \$300.

La tasa de cambio promedio de la utilidad por tonelada extra es

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{-300}{100} = -3$$

en donde $\Delta x = 3200 - 3100 = 100$. De modo que la utilidad decrece en un promedio de \$3 por tonelada con el incremento dado en la producción.

Referencia:

Arya, J. C., & Lardner, R. W. (2009). Matemáticas Aplicadas a la Administración ya la Economía. Pearson educación. pág. 442, 446