Aplicaciones al Ingreso, Costo y Utilidad

Las funciones más estudiadas en el área de la administración son las relacionadas con el **costo, ingreso y utilidad**, ya que con ayuda de Estas se pueden tomar decisiones frente a un problema real de una empresa.

Como se mencionó en la introducción a esta unidad, se presentarán las aplicaciones vistas durante el curso relacionadas al ingreso, costo y utilidad, así como nuevos problemas prácticos del área.

En la primera unidad se planteó el siguiente problema que se relaciona con las funciones de costo, ingreso y utilidad:

Ejemplo ***(Costos, ingresos y utilidades)***

Un fabricante de productos químicos advierte que el costo por semana de producir x toneladas de cierto fertilizante está dado por $C(x) = 20{,}000 + 40x$ dólares y el ingreso obtenido por la venta de x toneladas está dado por $R(x) = 100x - 0.01x^2$. La compañía actualmente produce 3100 toneladas por semana; pero está considerando incrementar la producción a 3200 toneladas por semana. Calcula los incrementos resultantes en el costo, el ingreso y la utilidad. Determina la tasa de cambio promedio de la utilidad por las toneladas extra producidas.

Solución

El primer valor de x es de 3100 y $x + \Delta x = 3200$:

$$\Delta C = C(\,x + \Delta x) - C(x)$$

$$= C(3200) - C(3100)$$

$$= [20000 + 40(3200)] - [20000 + 40(3100)]$$

$$= 148000 - 144000$$

$$= 4000$$

$$\Delta R = R(\,x + \Delta x) - R(x)$$

$$= R(3200) - R(3100)$$

$$= [100(3200)] - [0.01(3200)^2] -$$

$$[100(3100)] - [0.01(3100)^2]$$

$$= 217600 - 213900$$

$$= 3700$$

De modo que los costos se incrementan en $\$4000$ con el incremento dado en la producción, mientras los ingresos se incrementan en $\$3700$.

A partir de estos resultados, es claro que la utilidad debe decrecer en $\$300$.

Podemos advertir esto con más detalle si consideramos que las utilidades obtenidas por la empresa son iguales a sus ingresos menos sus costos, de modo que la utilidad $P(x)$ por la venta de x toneladas de fertilizante es

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 100x - 0.01x^2 - (20{,}000 + 40x) \\ &= 100x - 0.01x^2 - 20{,}000 - 40x \\ &= 60x - 0.01x^2 - 20{,}000 \end{aligned}$$

En consecuencia, el incremento en la utilidad cuando x cambia de 3100 a 3200 es

$$\begin{aligned} \Delta P &= P(3200) - P(3100) \\ &= [60(3200) - 0.01(3200)^2 - 20{,}000] - \\ &\quad [60(3100) - 0.01(3100)^2 - 20{,}000] \\ &= 69{,}600 - 69{,}900 = -300 \end{aligned}$$

Así, la utilidad decrece en $\$300$.

La tasa de cambio promedio de la utilidad por tonelada extra es

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{-300}{100} = -3$$

en donde $\Delta x = 3200 - 3100 = 100$. De modo que la utilidad decrece en un promedio de $\$3$ por tonelada con el incremento dado en la producción.

REFERENCIAS:

Arya, J. C., & Lardner, R. W. (2009). Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía. Pearson educación. pág. 442, 446.

En la unidad dos, se plantearon los siguientes problemas relacionados con las funciones de costo, ingreso y utilidad:

EJEMPLO 1.

Un fabricante de autos tiene una producción $\boldsymbol{x}$ y el costo total anual de la producción se describe por medio de la función: $\boldsymbol{C(x) = 100,000 + 1,500x + 0.2x^2}$**.** El costo cuando se producen 100 autos es de $252,000. Encontrar el costo marginal cuando se produce 1 auto más, y determinar si es conveniente producirlo.

Solución:

Utilizando la definición de costo marginal, que es el cálculo de la derivada, tenemos lo siguiente:

$$C(x) = 100,000 + 1,500x + 0.2x^2$$

$$C'(x) = 1,500 + 0.4x$$

La derivada de $C(x)$ se calcula con derivación de funciones polinomiales (a continuación, se muestra por pasos).

$$C(x) = 100,000 + 1,500x + 0.2x^2$$

$$C'(x) = 0 + (1)1,500x^{1-1} + (2)0.2x^{2-1}$$

$$C'(x) = 0 + 1,500x^0 + 0.4x^1\text{, sabemos que } x^0 = 1\text{; entonces:}$$

$$C'(x) = 1,500(1) + 0.4x^1$$

$$C'(x) = 1,500 + 0.4x$$

El costo por producir 1 auto más es: (para este cálculo se necesita evaluar la función del costo marginal con las unidades de producción del problema, en este caso 100 unidades):

$$C'(100) = 1,500 + 0.4(100)$$

$$C'(100) = 1,540\ pesos;$$

Costo marginal = $1,540\ pesos$

Ejemplo 2

Consideremos la función demanda $p(x) = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x$, donde $p(x)$ representa el precio unitario y x el número de unidades.

a) Determinar la función ingreso total.

b) Determinar la función ingreso promedio.

c) Determinar la función ingreso marginal.

d) Analizar las funciones anteriores al producir una unidad (x=1)

a) La fórmula para el cálculo del ingreso total está dada por:

$Ingreso\ total = x \cdot p(x)$

Para este problema queda:

$$I(x) = x \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}x\right) = \frac{5}{2}x - \frac{3}{4}x^2$$

b) Se sabe que

$$Ingreso\ promedio = \frac{I(x)}{x}$$

Entonces para este caso el

$$Ingreso\ promedio = \frac{\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}x^2}{x} = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x$$

c) Para el cálculo del ingreso marginal, sacamos la derivada de $I(x)$, se tiene:

$$I'(x) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x$$

d) $x = 1$

Entonces:

$$I(1) = 1.75$$

$$Ingreso\ promedio = \frac{I(x)}{x}$$

$$\boldsymbol{Ingreso\ promedio = \frac{I(1)}{1} = \frac{1.75}{1} = 1.75}$$

$$Ingreso\ Marginal = I'(x) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x$$

$$\boldsymbol{Ingreso\ Marginal = I'(1) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}(1) = 1}$$

Ejemplo 3

Si la función de ingreso total es $I(x) = 500x - 0.005x^2$, x^2(0; 100 000); y la función costo total es $C(x) = 150 + 100x + 0.003x^2$, x^2 (0; 500). Determinar la función utilidad marginal.

La función utilidad total está dada por:

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

Para este caso:

$$U(x) = 500x - 0.005x^2 - (150 + 100x + 0.003x^2)$$

$$U(x) = -0.008x^2 + 400x - 150$$

Al derivar la función anterior, obtenemos la función utilidad marginal,

$$U'(x) = -0.016x + 400$$

Que representa la ganancia o pérdida al producir una unidad adicional.

REFERENCIAS:

Arya, J.C., & Lardner R.W. (2009). Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía. Pearson Educación.