Aplicaciones al Ingreso, Costo y Utilidad: Derivadas

DERIVADAS APLICACIÓN

Ejemplo (Utilidad marginal) Un fabricante de calzado puede utilizar su planta para producir zapatos para dama o caballero. Si el fabrica x (en miles de pares) zapatos para caballero y y (en miles de pares) zapatos para dama a la semana, entonces x y y están relacionados por la ecuación

$$2x^2 + y^2 = 2.5$$

Si la utilidad es de $\$10$ por cada par de zapatos, calcule la utilidad marginal con respecto a x si $x = 2$.

Solución La utilidad semanal P en miles de dólares está dada por

$$P = 10x + 10y$$

dado que cada mil pares de zapatos se traducen en diez mil dólares de utilidad, así $(x + y)$ miles de pares darán $10(x + y)$ miles de dólares de utilidad. Pero

$$y^2 = 25 - 2x^2$$

o bien,

$$y = \sqrt{25 - 2x^2}$$

Por consiguiente, podemos expresar P solo en términos de x como

$$P = 10x + \sqrt{25 - 2x^2}$$

Aplicaciones al Ingreso, Costo y Utilidad: Derivadas

La **utilidad marginal** con respecto a x no es otra cosa que la derivada $\frac{dP}{dx}$. Mide el incremento en la utilidad por unidad de incremento en y cuando x, la producción de calzado para caballeros sufre un pequeño incremento. Esto es,

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}\left[10x + 10(25 - 2x^2)^{1/2}\right]$$

Con el objetivo de derivar el segundo término, debemos aplicar la **regla de la cadena** con interior $= (25 - 2x^2)$

$$\frac{d}{dx}(25 - 2x^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(25 - 2x^2)^{-1/2}.\frac{d}{dx}(25 - 2x^2)$$

$$= \frac{1}{2}(25 - 2x^2)^{-\frac{1}{2}}(-4x)$$

$$= -2x(25 - 2x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

En consecuencia,

$$\frac{dP}{dx} = 10 + (25 - 2x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}10 + 10\frac{d}{dx}(25 - 2x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 10 + 10\frac{d}{dx}(25 - 2x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 10 + 10\left[-2x(25 - 2x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= 10 - 20x(25 - 2x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Si $x = 2$ es el valor de y es

$$y = \sqrt{25 - 2x^2} = \ y = \sqrt{25 - 2(4)} = \sqrt{17} \approx 4.1$$

Por tanto, la empresa está produciendo 2000 pares de zapatos para caballero y 4100 pares de zapatos para dama por semana. Su **utilidad semanal** es

$$P = 10(x + y) = 10(2 + 4.1) = 61$$

(o $\$61{,}000$). La **utilidad marginal** es

$$\frac{dP}{dx} = 10 - 20(2)[25 - 2(4)]^{-\frac{1}{2}} = 10 - \frac{40}{\sqrt{17}} = 0.30$$

Así que un incremento de Δx miles de pares de zapatos para caballero produce un incremento aproximado de $(0.30)\Delta x$ miles de dólares en utilidad.

(Arya y Lardner, 2009, pág. 507).

Aplicaciones al Ingreso, Costo y Utilidad: Derivadas

EJEMPLO 2 (Análisis de la función de costo) Para la función costo

$$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40 + 1000$$

El costo marginal es

$$C'(x) = 0.003x^2 - 0.6x + 40$$

La segunda derivada es

$$C''(x) = 0.006x - 0.6 = 0.006(x - 100)$$

Si $x = 150$, el costo marginal es $C'(150) = 17.5$. Más aún,

$$C''(150) = 0.006(150 - 100) = 0.3$$

Podemos interpretar que el resultado significa que cada unidad adicional producida conduce a un incremento de 0.3 en el costo marginal.

REFERENCIAS:

Arya, J.C., & Lardner R.W. (2009). Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía. Pearson Educación. pp. 523