LOS CASOS GENERALES

Las anualidades generales son aquellas en las que el periodo de pago no coincide con el periodo de capitalización. Consideremos una situación que lo ejemplifica:

Una persona contrae una deuda de 10 mil pesos. Para saldarla, acuerda hacer seis pagos bimestrales vencidos de ***x*** cantidad, que comenzarán dos meses después y con intereses de 15% anual capitalizable mensualmente.

En este caso, el periodo de pago tiene una duración de dos meses, ya que se especifica que los pagos se harán bimestralmente. Por otro lado, se anota que el interés es capitalizable mensualmente y, como resulta obvio, el periodo de capitalización es de un mes. Dado que los periodos de pago y de capitalización son distintos, este ejemplo ilustra el caso de una anualidad general.

Los casos diferido y anticipado de las anualidades generales se pueden resolver mediante la combinación de métodos que ya hemos revisado anteriormente y lo que veremos a continuación. Hay que señalar que:

- La forma más sencilla de resolver las anualidades generales es modificarlas para que se ajusten al caso simple, y luego utilizar las fórmulas ya conocidas de estas para encontrar los valores deseados.

- Existen dos principales maneras de convertir anualidades generales en anualidades simples:

    1. Mediante la determinación de la tasa de interés equivalente.
    2. Mediante la determinación de la renta, o pago periódico, equivalente.

- Hay dos casos de anualidades generales:

    1. El periodo de pago es más largo que el periodo de capitalización o, al revés.
    2. El periodo de capitalización es más largo que el periodo de pago.

Caso 1. El periodo de pago es más prolongado que el de capitalización.

Debemos encontrar el monto de un conjunto de cuatro pagos trimestrales de 50 mil pesos, cuando el interés es de 36% anual convertible mensualmente.

Solución:

Observa que las rentas se consideran vencidas al final de cada periodo de pago ya que, nos ocuparemos de anualidades vencidas. También, como el periodo de pago es de tres meses y el de interés es de un mes, tenemos un caso de anualidad general con periodo de pago más largo que el de capitalización, por lo que usaremos los dos métodos mencionados para resolverla.

M = ¿?
R = $50,000
n = 4 trimestres
i = 0.36/12 = 0.03 mensual

a) Determinación de la tasa de interés equivalente

En cada uno de los trimestres hay tres periodos de capitalización. Si consideramos solamente un trimestre tendríamos que encontrar la tasa trimestral efectiva que es equivalente a una tasa mensual efectiva de 3.0%. Esto sería:

$$i' = (1 + i)^p - 1$$

$$i' = (1.03)^3 - 1 = 1.092727 - 1 = 0.092727$$

En donde:

i´ = la tasa efectiva por periodo de la anualidad general; en este caso es la tasa efectiva trimestral (0.092727).
p = número de periodos de interés por periodo de pago; 3.

Luego de haber determinado la tasa efectiva por trimestre, hemos convertido la anualidad general en una simple:

R = 50,000
n = 4
M = ¿?
i´ = 0.092727

Lo que resolvemos aplicando la fórmula conocida del monto para una anualidad simple:

$$M = R\,\frac{(1 + i')^n - 1}{i'}$$

$$M = 50{,}000\,\frac{(1.092727)^4 - 1}{0.092727} = 50{,}000\,(4.591552)$$

$$M = \$229{,}577.60$$

b) Determinación de la renta equivalente

Dado que planteamos el interés capitalizable cada mes, tenemos que encontrar la renta mensual durante tres meses, que sea equivalente a una renta trimestral de 50 mil pesos y, esto no es otra cosa que una anualidad simple:

M = 50,000
i = 0.03
p = 3
R´ = ¿?

$M = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Pero con nuestra nueva simbología:

$$M = R´ \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Donde:

R´ es la renta mensual equivalente a una renta trimestral de 50,000.

Entonces:

$50{,}000 = R´ \frac{(1.03)^3 - 1}{0.03} = R´\,(3.090900)$

$$R´ = \frac{50{,}000}{3.090900} = \$16{,}176.52$$

Ahora, vamos a determinar el monto de estas rentas equivalentes para el plazo completo de la anualidad:

M = ¿?
R = 16,176.52
n = 4 trimestres por 3 meses cada uno = 12
i = 0.03

$$M = 16{,}176.52 \frac{(1.03)^{12} - 1}{0.03} = 16{,}176.52\ (14.192029)$$

$$M = 229{,}577.64$$

Este es prácticamente el mismo resultado que obtuvimos mediante el otro método.

Caso 2. El periodo de pago es más corto que el de capitalización.

Debemos determinar el monto de un conjunto de 10 depósitos mensuales de 250 pesos si el interés que se debe pagar es de 30% convertible semestralmente.

a) Determinación de la tasa de interés equivalente

Como las rentas son mensuales, necesitamos encontrar el interés efectivo mensual equivalente a 15% semestral también efectivo.

$$(1 + i)^6 = 1.15$$

$$1 + i = 1.15^{1/6}$$

$$i = 1.15^{1/6} - 1$$

$$i = 0.023567$$

M = ¿?
R = 250
i = 0.023567 (mensual efectivo)
n = 10

$$M = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$M = 250 \frac{(1.023567)^{10} - 1}{0.023567} = 250\ (11.129991)$$

$$M = \$2{,}782.50$$

b) Determinación de la renta equivalente

En este caso se determina la renta que coincide con el periodo de capitalización de seis meses:

$$R' = 250\,\frac{(1.023567)^6 - 1}{0.023567} = 250\,(6.364813)$$

$$R' = \$1{,}591.20$$

Y para el plazo total de la operación:

R = $1,591.20
n = 10 meses = 10/6 semestres = 1.666667 semestres
i = 0.15 semestral

$$M = 1{,}591.20\,\frac{(1.15)^{1.666667} - 1}{0.15} = 1{,}591.20\,(1.748676)$$

$$M = \$2{,}782.49$$

El cual es prácticamente igual al resultado obtenido anteriormente.

Reference:

Díaz A., Aguilera V. (2020). Matemáticas Financieras. México. McGraw Hill.