PUNTOS CRÍTICOS Y DESIGUALDADES CUADRÁTICAS

Para resolver una desigualdad cuadrática es importante conocer los puntos críticos. Los puntos críticos se obtienen realizando el mismo procedimiento que se utilizó anteriormente, obtener las raíces de la ecuación cuadrática. Las raíces se pueden obtener por medio de métodos de factorización o bien, utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se dará solución a la siguiente desigualdad cuadrática

$$x^2 + 3x < 4$$

Al igual que en el procedimiento de encontrar las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + 3x = 4$, primeramente, se pasan todos los términos de un lado de la desigualdad:

$$x^2 + 3x - 4 < 0$$

Se factoriza y se obtiene:

$$(x - 1)(x + 4) < 0$$

Se igualan a cero ambos factores del lado izquierdo de la desigualdad para obtener los **puntos críticos** de la desigualdad cuadrática.

$$(x - 1) = 0 \text{ y } (x + 4) = 0$$

Se resuelve cada expresión por separado, los resultados serán los puntos críticos:

Expresión 1:

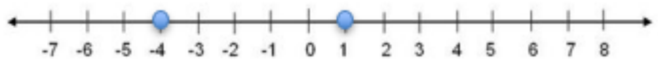
$$(x \ -1\ ) = 0$$
$$x \ -1 \ = 0$$
$$\boxed{x \ = 1}$$

Expresión 2:

$$(x + 4) = 0$$
$$x + 4 = 0$$
$$\boxed{x = -4}$$

Las raíces de la ecuación $x^2 + \ 3x \ - \ 4 = \ 0$ fungirán ahora como los puntos críticos de la desigualdad $x^2 + \ 3x \ - \ 4 < \ 0. Por\ lo\ tanto\ los\ puntos\ críticos$ son x= 1 y x= -4

Para obtener la solución de la desigualdad se graficarán los puntos críticos en la recta numérica:



Podemos notar que los puntos dividen a la recta en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -4), (-4, 1)\ y\ (1, \infty)$$

Probaremos en cuál o cuáles de los intervalos anteriores **la desigualdad original se cumple**. Para ello, tomaremos un número real que pertenezca a cada uno de los intervalos respectivamente.

Primero seleccionaremos cualquier valor contenido en el intervalo $(-\infty, -4), por\ ejemplo\ el - 6$. Se sustituye el valor de -6 en la desigualdad a la que se le quiere encontrar solución, para saber si el valor hace que la desigualdad sea verdadera.

Entonces, si x=-6, sustituimos en la desigualdad $x^2 + 3x < 4$ el valor escogido para x y obtenemos que:

$$(-6)^2 + 3(-6) < 4$$
$$36 - 18 < 4$$
$$36 - 18 < 4$$
$$18 < 4$$

La desigualdad resultó ser **falsa** ya que 18 es mayor que 4, por lo que **el intervalo** $(-\infty, \mathbf{-4})$ **no es solución de dicha desigualdad.**

Ahora tomaremos al número -3 que pertenece al intervalo $(-4, 1)$ y sustituiremos el valor de -3 en la desigualdad para verificar si la desigualdad es verdadera.

Tendremos que:

$$(-3)^2 + 3(-3) < 4$$
$$9 + -9 < 4$$
$$0 < 4$$

Llegamos a un resultado **verdadero**, ya que efectivamente, cero es menor que 4, por lo que el intervalo $(\mathbf{-4}, \mathbf{1})$ **es solución a dicha desigualdad**.

Para asegurarse que el intervalo es la solución, podemos sustituir además un valor menor a 1 y verificar en la desigualdad, este valor puede ser el 0 (cero) o incluso un valor real como el 0.9 y verificar.

Hagamos el ejercicio utilizando el x = 0.9.

$$(0.9)^2 + 3(0.9) < 4$$
$$0.81 + 2.7 < 4$$
$$3.51 < 4$$

Como el 3.5 es menor a 4, complementamos la afirmación anterior, el intervalo (-4,1), **es solución** a la desigualdad $x^2 + 3x < 4$.

Por último, se probará sustituyendo el valor de x=3 en la desigualdad para verificar si el intervalo $(1, \infty)$ es o no solución.

$$(3)^2 + 3(3) < 4$$
$$9 + 9 < 4$$
$$18 < 4$$

La desigualdad resultó ser falsa ya que 18 es mayor que 4, por lo que **el intervalo $(\mathbf{1}, \infty)$ no es solución de dicha desigualdad.**

Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad cuadrática es el intervalo abierto $(\mathbf{-4}, \mathbf{1})$ y se puede representar en la recta numérica de la siguiente manera:

También podemos representar la solución como:
-4 < x <1

Es decir, todos los números reales que son mayores que -4 y menores que 1 cumplen la desigualdad cuadrática $x^2 + 3x < 4$.

Referencia:
O'Regan, G. (2023). A Guide to Business Mathematics. Chapman & Hall / CRC Press.