INVERSA DE UNA MATRIZ

En el álgebra lineal, la **matriz identidad** y **la inversa** son conceptos fundamentales que nos ayudan a comprender cómo funcionan las operaciones entre matrices. Ambas son esenciales para resolver sistemas de ecuaciones lineales, analizar transformaciones y modelar problemas en los negocios y la ingeniería.

MATRIZ IDENTIDAD

La matriz identidad es una matriz cuadrada en la que **todos** los elementos de la **diagonal principal son iguales a 1**, y el resto de los elementos son 0. Se representa con la letra 'I'. Su función es similar al número 1 en la multiplicación: cuando cualquier matriz se multiplica por la identidad, el resultado es la misma matriz.

Ejemplo:

$$\text{Si } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$A \times I = I \times A = A$$

Esto significa que la matriz identidad actúa como un 'neutro multiplicativo'. En el contexto empresarial, la matriz identidad puede representar un estado en el que no hay cambio o alteración de las variables de un sistema.

INVERSA DE UNA MATRIZ

La inversa de una matriz es aquella que, al multiplicarse por la matriz original, produce la matriz identidad. Solo las matrices cuadradas con determinante distinto de cero tienen inversa. Si A es una matriz, su inversa se denota como A^{-1} y cumple que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$.

B debe ser una matriz cuadrada del mismo tamaño que **A**; de otra forma **AB** o **BA** no estuvieran definidos.

Tomando la definición anterior, buscaremos una matriz B que satisfaga la definición de inversa de una matriz A.

Ejemplo: Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y si A tiene inversa, existe una matriz $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ que es la inversa de A, que cumple que

AB=I y **BA=I**

Teniendo en cuenta las propiedades anteriores, podemos escribir la ecuación **AB=I** de forma matricial:

A B = I

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando las matrices A y B obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 2a - c & 2b - d \\ a + c & b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dos matrices son iguales si son iguales término a término, por lo que podemos obtener las igualdades siguientes

$$2a - c = 1 \qquad 2b - d = 0$$
$$a + c = 0 \qquad b + d = 1$$

Obteniendo el sistema de ecuaciones lineales anterior, se deberá resolver por el método que se prefiera.

Al resolver el sistema anterior se obtiene que:

$$a = \frac{1}{3}, \qquad b = \frac{1}{3}, \quad c = -\frac{1}{3}, \quad d = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, como la matriz inversa de A es $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sustituiremos los valores obtenidos del sistema de ecuaciones lineales y se tiene que la matriz inversa de A es la siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Para comprobar que efectivamente B sea la inversa de A, debemos comprobar que se cumpla:

AB=I

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y además,

BA=I

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso se cumplen ambas igualdades por lo que se puede afirmar que:

La matriz $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ es la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Referencia:

Nicholson, W. K. (2023). Linear algebra with applications (Revised ed.). Lyryx Learning. Recuperado de:

https://open.umn.edu/opentextbooks/textbooks/533