OPERACIONES MATRICIALES

Las operaciones elementales que se efectúan entre matrices son principalmente la **suma**, **resta** y **multiplicación**.

Dos matrices se dicen iguales sí y solo sí tienen la misma dimensión e idénticos elementos en las posiciones correspondientes, es decir $A = B$ si y solo si $a_{ij} = b_{ij}$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ b_{m1} & b_{m2}\cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$ en particular se tiene que:

$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ pero $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

SUMA

Para obtener la suma de dos matrices, primero se debe de verificar que **las dimensiones de estas coincidan** (número de renglones igual al número de columnas) para que la operación esté bien definida, pues no es válido que sobren o falten elementos en las matrices que se están sumando.

Para realizar la operación se suma cada par de elementos correspondientes, es decir el elemento de la posición (1,1) en una matriz (A) con el elemento (1,1) en la otra matriz (B); en general se tiene que:

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \; \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \; \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\text{entonces } A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \quad \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m} + b_{m2} \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Un ejemplo de la suma de dos matrices cuadradas es:

$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$ entonces $A + B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} + 7 & 5 + 9 \\ -3 + 10 & -7 + 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{31}{4} & 14 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

Veamos ahora la suma con matrices rectangulares, sean:

$$C = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 13 & 15 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \text{y } D = \begin{bmatrix} 5 & -13 \\ 1 & 35 \\ 8 & 17 \end{bmatrix} \text{entonces } C + D = \begin{bmatrix} 9 + 5 & -6 - 13 \\ 13 + 1 & 15 + 35 \\ -7 + 8 & 4 + 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -19 \\ 14 & 50 \\ 1 & 21 \end{bmatrix}$$

En el caso de que se estén sumando matrices de diferente dimensión, se dirá **entonces que la suma <u>no está definida</u>,** por ejemplo:

$$E = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 10 \\ 9 & 4 & 13 \\ -16 & -5 & 11 \end{bmatrix} \text{y } F = \begin{bmatrix} 9 & 17 \\ -8 & 14 \\ \frac{5}{7} & 16 \end{bmatrix}$$

entonces $E + F = \boldsymbol{La\ suma\ no\ est\acute{a}\ definida}$

Se da este resultado debido a que las dimensiones de las matrices no coinciden, pues la matriz E es de dimensión $3x3$, mientras que la matriz F es de dimensión $3x2$.

RESTA

La **resta** se realiza de forma análoga a la suma considerando, de nueva cuenta, que para efectuar una suma, **las dimensiones de las matrices deben de coincidir**. En general, se tiene que:

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \\ b_{m1} & b_{m2}\cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\text{entonces } A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \quad \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_m - b_{m2}\cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, al restar las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} \text{ entonces}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{4} - 7 & 5 - 9 \\ -3 - 10 & -7 - 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-25}{4} & -4 \\ -13 & -22 \end{bmatrix}$$

Cabe mencionar que, dentro de las operaciones de matrices también se considera la multiplicación de un escalar (un escalar es un valor numérico, por ejemplo el -12, 7, 2.6, etcétera) por una matriz. Las operaciones son, multiplicar cada elemento de esa matriz por el escalar dado. Por ejemplo, sea el escalar igual a 3, entonces:

$$3\begin{bmatrix} 4 & -8 & 11 \\ 2 & 9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3)(4) & (3)(-8) & (3)(11) \\ (3)(2) & (3)(9) & (3)(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -24 & 33 \\ 6 & 27 & 18 \end{bmatrix}$$

MULTIPLICACIÓN

El procedimiento para encontrar un **producto de matrices** es un poco más complicado, pero no difícil de realizar; simplemente se debe tener cuidado a la hora de hacer las operaciones.

Lo primero que se debe hacer es comparar las dimensiones de ambas matrices para determinar si la operación se puede efectuar o no:

La dimensión de la matriz A es $m \times n$ (m filas y n columnas), y la dimensión de la matriz B es $n \times p$ (n filas y p columnas); entonces, **las columnas** de la matriz A deben coincidir con **las filas** de la matriz B, para que la operación esté bien definida, de lo contrario tenemos una situación similar a la suma/resta de matrices, en este caso, la multiplicación no está definida.

Ejemplo 1. Primero, con matrices de dimensión 2×2. Sean

$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$,

El producto $A \times B$ se puede llevar a cabo, pues las dimensiones lo permiten; esto es

$$A_{2\times 2} \times B_{2\times 2} = C_{2\times 2}$$

el resultado será una matriz de dimensión 2×2.

El producto se realiza multiplicando una fila de la matriz A por un columna de la matriz B y sumando sus elementos, y estos pasarán a ser un elemento de la columna correspondiente, es decir, renglón 1, columna 1 serán el elemento (1,1) de la matriz resultante (C), renglón 1 columna 2, ahora serán el elemento (1,2) en la matriz resultante:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} x\, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix},$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} (1)(2) + (8)(-4) & (5)(2) + (7)(-4) \\ (1)(6) + (8)(3) & (5)(6) + (7)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & -18 \\ 30 & 51 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2. Ahora sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}_{2\times 1}$ el producto está bien definido, porque las columnas de la matriz A coinciden con la dimensión de las filas de la matriz B (2 columnas y 2 renglones).

Con lo que se puede a realizar la multiplicación de ambas matrices:

$$A_{3\times 2} \times B_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}_{2\times 1} = C_{3\times 1}$$

$$A_{3\times 2} \times B_{2\times 1} = \begin{bmatrix} (5)(1) + (9)(3) \\ (5)(2) + (9)(8) \\ (5)(4) + (9)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 82 \\ 20 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

En este punto es bueno mencionar que **la multiplicación de matrices no es conmutativa**, pues $A \times B \neq B \times A$.

Considerando los valores resultantes del ejemplo 1, se sabe que:

$$A \times B = \begin{bmatrix} -30 & -18 \\ 30 & 51 \end{bmatrix}$$

Ahora encontremos el producto:

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(1) + (6)(5) & (-4)(1) + (3)(5) \\ (2)(8) + (6)(7) & (-4)(8) + (3)(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 11 \\ 58 & -11 \end{bmatrix}$$

Se observa claramente la propiedad de **la no validez de la conmutatividad** de las matrices.

$$A \times B = \begin{bmatrix} -30 & -18 \\ 30 & 51 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 32 & 11 \\ 58 & -11 \end{bmatrix} = B \times A$$

En el ejemplo 2 se tiene que:

$$A_{3\times 2} \times B_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 32 \\ 82 \\ 20 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Mientras que:

$B_{2\times 1} \times A_{3\times 2} = \, no\ está\ definido$, recordando la razón, es por que B la cantidad de columnas de B (1 columna) es diferente a la cantidad de renglones de A (2 renglones).

Esta propiedad no la debes olvidar, pues es pieza clave para poder realizar el producto entre matrices. La leyenda conocida desde primaria que dice que “el orden de los factores no altera el producto”, en las matrices no es válida.

Referencia:

Nicholson, W. K. (2023). Linear algebra with applications (Revised ed.). Lyryx Learning. Recuperado de: https://open.umn.edu/opentextbooks/textbooks/533