Ejemplo:

La Precision Scientific Instrument Company fabrica termómetros que, se supone, deben dar lecturas de 0ºC en el punto de congelación del agua. Las pruebas de una muestra grande de estos instrumentos revelaron que en el punto de congelación del agua, algunos termómetros daban lecturas por debajo de 0ºC (denotadas con números negativos), y otros daban lecturas por encima de 0ºC (denotadas con números positivos). Suponga que la lectura media es 0ºC y que la desviación estándar de las lecturas es 1.00ºC. También suponga que las lecturas se distribuyen de manera normal. Si se elige al azar un termómetro, calcule la probabilidad de que, en el punto de congelación del agua, la lectura sea menor que 1.27ºC.

Solución:

La distribución de probabilidad de las lecturas es una distribución normal estándar, ya que las lecturas se distribuyen de forma normal, con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Necesitamos encontrar el área que está debajo de z=1.27. El área por debajo de z=1.27 es igual a la probabilidad de seleccionar al azar un termómetro con una lectura menor que 1.27ºC. En la tabla de la distribución normal estándar encontramos que esta área es 0.8980.

Ejemplo:

Puntuaciones *z* NEGATIVAS

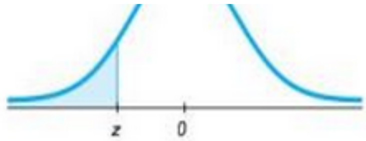

TABLA A-2 Distribución normal estándar (*z*): Área acumulativa de la IZQUIERDA

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.50 y menores	.0001									
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170

Imagen tomada de Triola, M., 2004, Probabilidad y Estadística, Pearson Educación.

Ejemplo:

Interpretación: La probabilidad de seleccionar al azar un termómetro con una lectura menor que 1.27ºC (en el punto de congelación del agua) es igual al área de 0.8980. Otra forma de interpretar este resultado es concluir que el 89.8% de los termómetros tendrán lecturas por debajo de 1.27ºC.

Ejemplo:

Considerando los termómetros del ejemplo anterior, calcule la probabilidad de seleccionar al azar un termómetro con una lectura (en el punto de congelación del agua) por arriba de -1.23ºC.

Solución:

Nuevamente calculamos la probabilidad deseada encontrando el área correspondiente. Hay que considerar que la tabla de la distribución normal estándar está diseñada para aplicarse únicamente a áreas acumuladas desde la izquierda. Si nos remitimos a la tabla de la distribución normal estándar, en la página de puntuaciones negativas:

Ejemplo:

Puntuaciones z NEGATIVAS

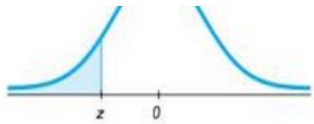

TABLA A-2 Distribución normal estándar (z): Área acumulativa de la IZQUIERDA

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.50 y menores	.0001									
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	* .0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	* .0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170

Imagen tomada de Triola, M., 2004, Probabilidad y Estadística, Pearson Educación.

Encontramos que el área acumulada de la izquierda hasta z=-1.23 es 0.1093. Sabiendo que el área total bajo la curva es 1, podemos calcular el área sombreada si restamos 0.1093 de 1. El resultado es 0.8907.

Ejemplo:

Interpretación: Debido a la correspondencia entre probabilidad y área, podemos concluir que la probabilidad de seleccionar aleatoriamente un termómetro con una lectura por arriba de -1.23ºC, en el punto de congelación del agua, es de 0.8907 (que corresponde al área a la derecha de z=-1.23). En otras palabras, el 89.07% de los termómetros tienen lecturas por encima de -1.23ºC.

Ejemplo: Realice una selección aleatoria de la misma muestra de termómetros del primer ejemplo de la sección y calcule la probabilidad de que el termómetro elegido arroje lecturas (en el punto de congelación del agua) entre -2ºC y 1.5ºC

Solución:

Nuevamente tratamos con los valores distribuidos de manera normal, con una media de 0ºC y una desviación estándar de 1ºC. La probabilidad de seleccionar un termómetro con una lectura comprendida entre -2ºC y 1.5ºC corresponde al área en un intervalo, por lo que se calcula para z = 1.5 corresponde el área de 0.9332 y para z = -2 corresponde al área de 0.0228. Entonces se hace una diferencia entre 0.9332 y 0.0228. El área es por lo tanto 0.9332-0.0228=0.9104.

Interpretación:

Considerando la correspondencia entre probabilidad y área, concluimos que existe una probabilidad de 0.9104 de seleccionar al azar uno de los termómetros con una lectura entre -2ºC y 1.5ºC, en el punto de congelación del agua. Otra forma de interpretar estos resultados es afirmar que si se seleccionan muchos termómetros para probarlos en el punto de congelación del agua, entonces 0.9104 (o el 91.04%) de ellos tendrán lecturas entre -2ºC y 1.5ºC.

El ejemplo anterior puede generalizarse como la siguiente regla: el área correspondiente a la región localizada entre dos puntuaciones z específica puede obtenerse al calcular la diferencia entre las dos áreas localizadas en la tabla de la distribución normal estándar.

Ejemplo:

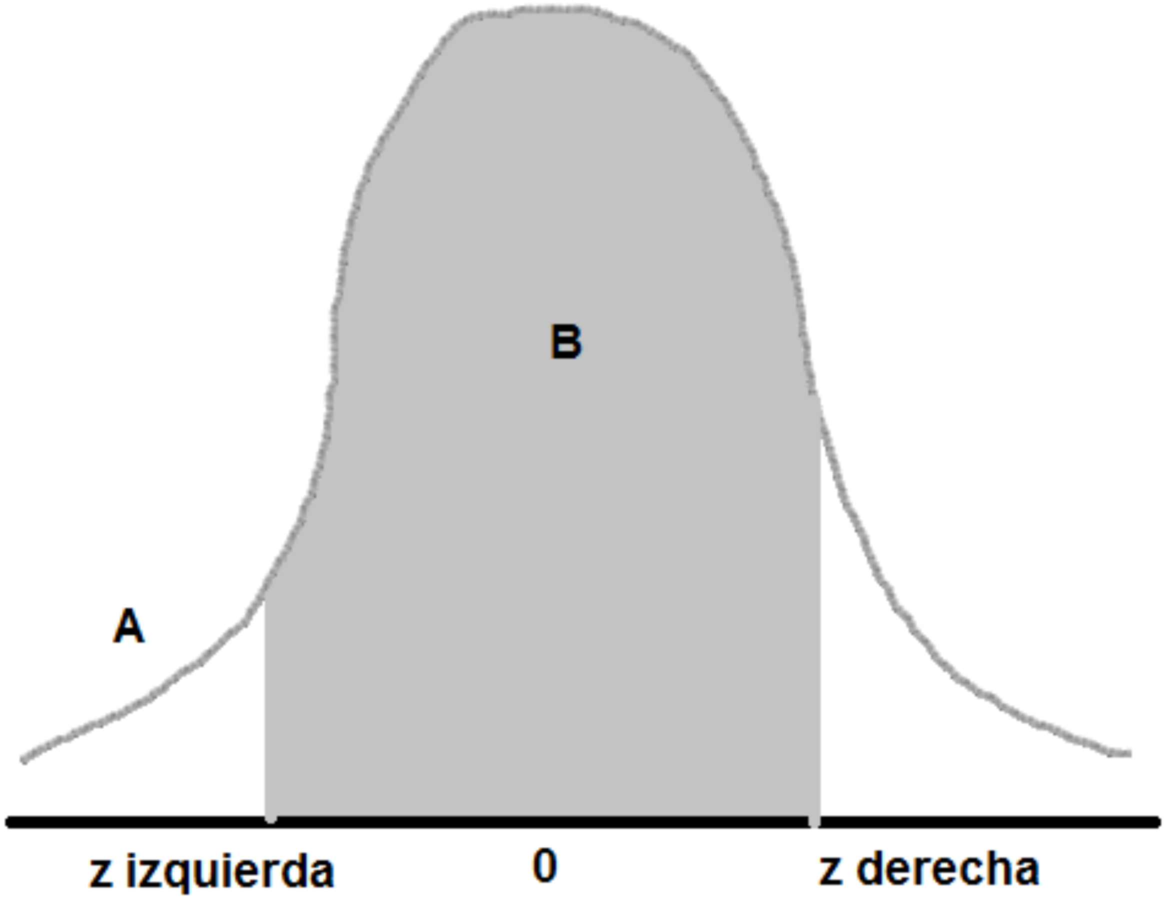

Imagen elaborada por Elsa Rivera (2015), Cálculo de área entre dos puntuaciones.

$$\begin{aligned}\text{Área sombreada B} &= (\text{áreas A y B combinadas}) - (\text{área A})\\ &= (\text{área de la tabla usando z derecha}) - (\text{área de la tabla usando z izquierda})\end{aligned}$$

Notación:

$P(a < z < b)$ denota la probabilidad de que la puntuación z esté entre a y b.

$P(z > a)$ denota la probabilidad de que la puntuación z sea mayor que a.

$P(z > a)$ denota la probabilidad de que la puntuación z sea menor que a.

Ejemplo:

Con esta notación podemos expresar el resultado del ejemplo anterior de la siguiente manera: $P(-2 < z < 1.5) = 0.9104$, lo cual establece en símbolos que la probabilidad de que una puntuación z caiga entre -2 y 1.5 es de 0.9104. Con una distribución de probabilidad continua, tal como la distribución normal, la probabilidad de obtener cualquier valor exacto es 0. Es decir, $P(z = a) = 0$. Por ejemplo, existe una probabilidad 0 de seleccionar al azar a una persona cuya estatura sea exactamente de 68.12345678 pulgadas. En la distribución normal, cualquier punto único sobre la escala horizontal está representado, no por una región bajo la curva, sino por una línea vertical por arriba del punto. Para $P(z = 1.5)$ tenemos una línea vertical que está por arriba de $z = 1.5$, pero esta línea vertical, por sí misma, no contiene un área, de manera que $P(z = 1.5) = 0$. Para cualquier variable aleatoria continua, la probabilidad de un valor exacto es cero, y se infiere que $P(a \leq z \leq b) = P(a < z < b)$. También se deduce que la probabilidad de obtener una puntuación z de a lo sumo b es igual a la probabilidad de obtener una puntuación z menor que b. Es importante interpretar correctamente frases clave como a lo sumo, al menos, más que, no más que, etcétera.

Cálculo de puntuaciones z de áreas conocidas.

Hasta ahora, los ejemplos vistos que implican la distribución normal estándar han seguido el mismo formato: dadas las puntuaciones z, calculamos área bajo la curva; estas áreas corresponden a probabilidades. En muchos otros casos, nos enfrentaremos al proceso inverso: conocemos el área (o probabilidad), pero necesitamos calcular la puntuación z correspondiente. En tales casos es muy importante evitar una confusión entre las puntuaciones z y las áreas. Recuerde, las puntuaciones z son distancias a lo largo de la escala horizontal, mientras que las áreas (o probabilidades) son regiones bajo la curva. Además, las puntuaciones z ubicadas a la mitad izquierda de la curva siempre son negativas. Si ya conocemos una probabilidad y deseamos determinar la puntuación z correspondiente, la calculamos de la siguiente forma:

Ejemplo:

Procedimiento para el cálculo de una puntación z a partir de un área conocida.

1. Dibuje una curva en forma de campana e identifique la región bajo la curva que corresponde a la probabilidad dada. Si no se trata de una región acumulada desde la izquierda, trabaje con una región acumulada conocida que inicia desde la izquierda.

2. Usando el área acumulada de la izquierda, localice la probabilidad más cercana en el cuerpo de la tabla de distribución normal estándar e identifique la puntuación z correspondiente.

Cuando se remita a la tabla de la distribución normal estándar, recuerde que el cuerpo de la tabla proporciona áreas acumuladas desde la izquierda.

Ejemplo:

Considere los mismo termómetros de un ejemplo anterior, con lecturas de temperatura en el punto de congelación del agua distribuidas normalmente, con una media de 0ºC y una desviación estándar de 1ºC. Calcule la temperatura correspondiente a P_{95}, el percentil 95. Es decir, calcule la temperatura que separa el 95% inferior del 5% superior.

Ejemplo:

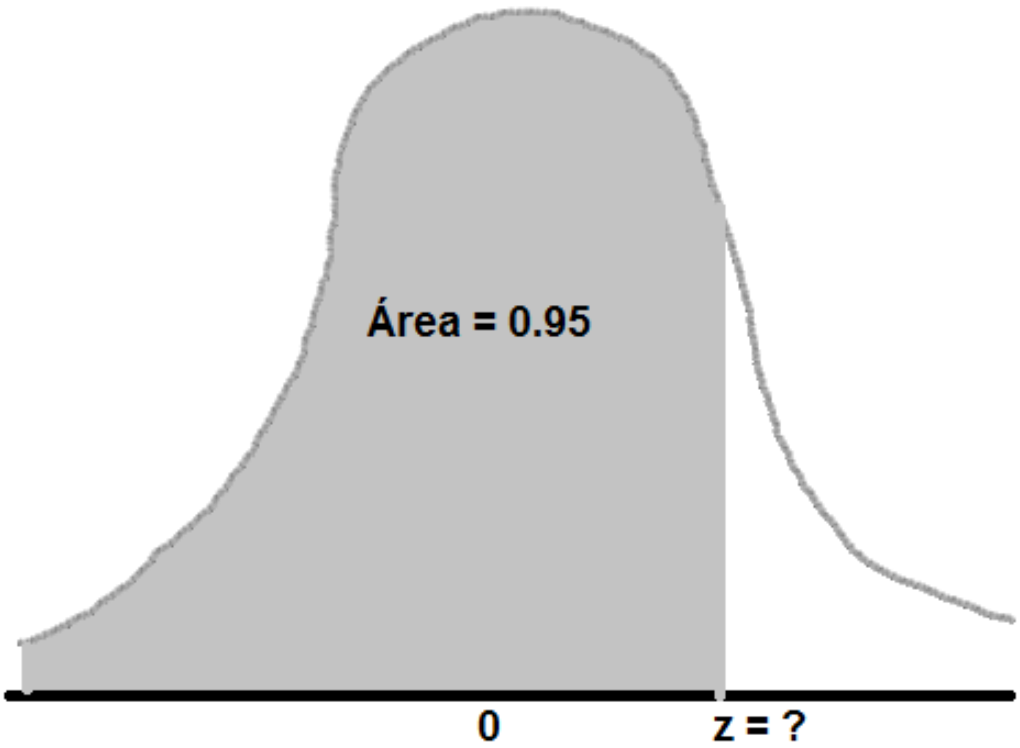

Imagen elaborada por Elsa Rivera (2015), Cálculo del percentil 95.

Solución. La figura anterior incluye la puntuación z que corresponde al percentil 95, con el 95% del área (o 0.95) por debajo de ella. Al remitirnos a la tabla de la distribución normal estándar buscamos el área de 0.95 en el cuerpo de la tabla y después buscamos la puntuación z correspondiente. En la tabla de la distribución normal estándar encontramos el área de 0.95 que corresponde a una puntuación de z de 1.645. Ahora podemos concluir que la puntuación z en la figura anterior es 1.645, por lo que el percentil 95 es la lectura de temperatura correspondiente a 1.645ºC.

Ejemplo:

Interpretación: al probar los termómetros a la temperatura de congelación, el 95% de las lecturas serán menores que, o iguales a 1.645ºC y el 5% de ellas serán mayores que, o iguales a 1.645ºC.

Note que en la solución del problema anterior, la tabla de la distribución normal estándar, indicó una puntuación z de 1.645, que está a la mitad de 1.64 y 1.65. Con la tabla de la distribución normal estándar, generalmente podemos evitar la interpolación si tan solo seleccionamos el valor más cercano. Existen casos especiales, listados en la tabla adjunta, los cuales son importantes ya que se utilizan con frecuencia en una amplia variedad de aplicaciones.

Casos Especiales:

Puntuación z	Área acumulada desde la izquierda
1.645	0.95
-1.645	0.05
2.575	0.995
-2.575	0.005
Mayor que 3.49	0.9999
Menor que -3.49	0.0001

(En uno de los esos casos especiales, el valor de $z = 2.576$ da un área ligeramente más cercana a la de 0.995, pero $z = 2.575$ tiene la ventaja de ser el valor intermedio entre $z = 2.57$ y $z = 2.58$). Con la excepción de estos casos especiales, podemos seleccionar el valor más cercano en la tabla (si un valor deseado se encuentra entre dos valores de la tabla, seleccione el valor más grande).

Ejemplo:

Además, para las puntuaciones z por arriba de 3.49, podemos utilizar 0.9999 como aproximación al área acumulada a partir de la izquierda; para puntuaciones z por debajo de -3.49, podemos utilizar 0.0001 como aproximación del área acumulada a partir de la izquierda.

Ejemplo:

Considere los mismo termómetros de ejemplos anteriores y calcule las temperaturas que separan el 2.5% inferior y el 2.5% superior.

Solución: La figura

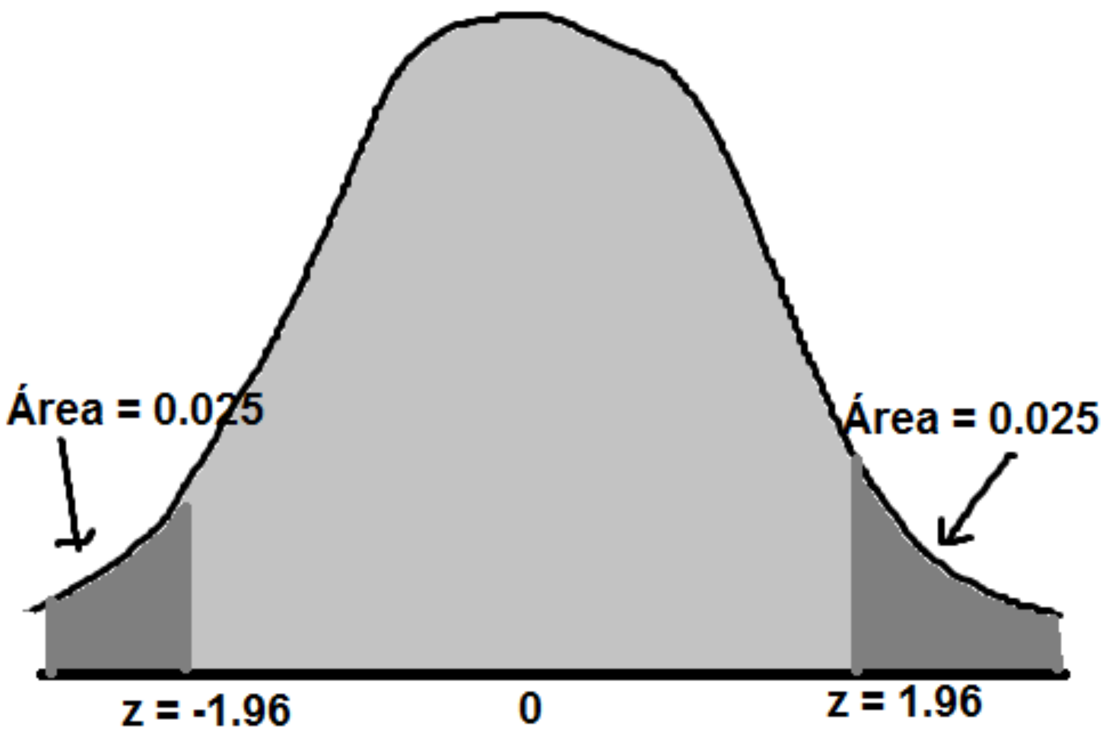

Imagen elaborada por Elsa Rivera (2015), Cálculo de puntaciones z.

Ejemplo:

Presenta las puntuaciones z requeridas. Para encontrar la puntuación z localizada a la izquierda, hay que remitirse a la tabla de la distribución normal estándar y busque el área de 0.025 en el cuerpo de la tabla. El resultado es z = -1.96. Para encontrar la puntuación z localizada a la derecha, remítase al cuerpo de la tabla y busque el área de 0.975. (Recuerde que la tabla de la distribución normal estándar siempre da áreas acumuladas a partir de la izquierda). El resultado es z = 1.96. Los valores de z = -1.96 y z = 1.96 separan el 2.5% inferior y el 2.5% superior, como se observa en la figura anterior.

Interpretación: al probar los termómetros a la temperatura de congelación, el 2.5% de las lecturas serán iguales o menores que -1.96ºC, y el 2.5% de las lecturas serán iguales o mayores que 1.96ºC. Otra interpretación es que, en el punto de congelación del agua, el 95% de todas las lecturas de los termómetros se ubicarán entre -1.96ºC y 1.96ºC.

Valores críticos. Para una distribución normal, un **valor crítico** es una puntuación z en el límite que separa a las puntuaciones z probables de las que son improbables. Algunos valores críticos comunes son z = -1.96, los cuales se obtienen como el ejemplo anterior. En este ejemplo es poco probable que ocurran los valores por debajo de z=-1.96, ya que solo se presentan en el 2.5% de las lecturas, y es poco probable que ocurran valores por arriba de z=1.96 porque también se presentan solo en el 2.5% de las lecturas.

Notación: La expresión z_α denota la puntuación z con un área de α a su derecha (α es la letra griega alfa).

Referencia:
Triola, M., 2013, Estadística, Pearson Educación.