

5

Método de la tasa interna de rendimiento



El propósito de este capítulo es mostrar un análisis completo del método de la tasa interna de rendimiento.

En la primera parte se explica el procedimiento que se debe seguir cuando se analiza un proyecto individual, así como también el enfoque incremental con que se debe aplicar este método cuando se analizan varios proyectos mutuamente exclusivos. En esta primera parte se hace énfasis en el significado de la tasa interna de rendimiento, así como en las condiciones que deberán reunirse para que ésta sea única.

En la segunda parte se muestra un algoritmo (ligeramente modificado) que propuso James C. T. Mao para resolver el difícil problema de tasas múltiples de rendimiento. En esta parte, primeramente se explica cómo distinguir cuándo una inversión no tiene, tiene solamente una, o tiene múltiples tasas de rendimiento. En seguida, se propone una forma en la cual los proyectos pueden ser clasificados y finalmente se explica el algoritmo general que deberá ser utilizado en la evaluación de inversiones no-simples.

PROYECTOS CON UNA SOLA TASA INTERNA DE RENDIMIENTO

5.1 TASA INTERNA DE RENDIMIENTO (TIR)

En todos los criterios de decisión, se utiliza alguna clase de índice, medida de equivalencia, o base de comparación capaz de resumir las diferencias de importancia que existen entre las alternativas de inversión. Es importante distinguir entre criterio de decisión y una base de comparación. Esta última es un índice que contiene cierta clase de información sobre la serie de ingresos y gastos a que da lugar una oportunidad de inversión.

La tasa interna de rendimiento, como se le llama frecuentemente, es un índice de rentabilidad ampliamente aceptado. Está definida como la tasa de interés que reduce a cero el valor presente, el valor futuro, o el valor anual equivalente de una serie de ingresos y egresos. Es decir, la tasa interna de rendimiento de una propuesta de inversión, es aquella tasa de interés i^* que satisface cualquiera de las siguientes ecuaciones:

74 Método de la tasa interna de rendimiento

$$\sum_{t=0}^n \frac{S_t}{(1+i^*)^t} = 0 \quad (5.1)$$

$$\sum_{t=0}^n S_t (1+i^*)^{n-t} = 0 \quad (5.2)$$

$$\sum_{t=0}^n S_t (P/F, i^*, t) (A/P, i^*, n) = 0 \quad (5.3)$$

donde:

S_t = Flujo de efectivo neto del período t .
 n = Vida de la propuesta de inversión.

En la mayoría de las situaciones prácticas es suficiente considerar el intervalo $-1 < i^* < \infty$ como ámbito de la tasa interna de rendimiento, ya que es muy poco probable que en un proyecto de inversión se pierda más de la cantidad que se invirtió. Por otra parte, la figura 5.1 ilustra la forma más común de las gráficas de valor presente, valor futuro y valor anual equivalente, en función de la tasa de interés. En esta figura, se puede apreciar que todas estas curvas cortan al eje horizontal en el mismo punto, es decir, todas ellas pasan a través del punto que corresponde a la tasa interna de rendimiento del proyecto de inversión.

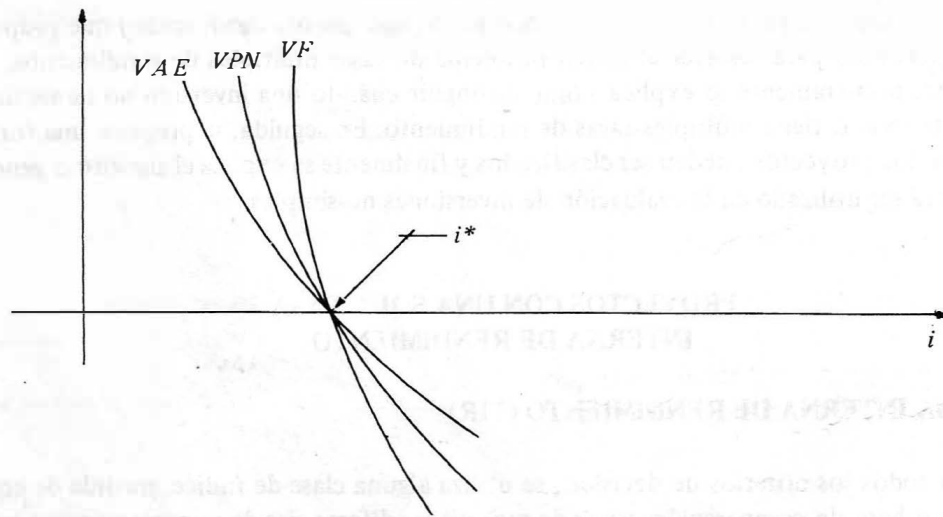


FIGURA 5.1. Gráficas del valor presente, valor futuro y valor anual equivalente, en función de la tasa de interés.

5.2 SIGNIFICADO DE LA TASA INTERNA DE RENDIMIENTO

En términos económicos la tasa interna de rendimiento representa el porcentaje o la tasa de interés que se gana sobre el saldo no recuperado de una inversión. El saldo no re-

cuperado de una inversión en cualquier punto del tiempo de la vida del proyecto, puede ser visto como la porción de la inversión original que aún permanece sin recuperarse en ese tiempo. El saldo no recuperado de una inversión al tiempo t , se evalúa de acuerdo a la siguiente expresión:

$$F_t = \sum_{j=0}^t S_j (1 + i^*)^{t-j} \quad (5.4)$$

Es decir, el saldo no recuperado de una propuesta de inversión en el tiempo t , es el valor futuro de la propuesta en ese tiempo. Para comprender mejor el significado de la tasa interna de rendimiento, la tabla 5-1 muestra dos proyectos de inversión cuyas tasas internas de rendimiento son de 15%. Cada uno de estos proyectos puede ser interpretado como un acuerdo en el que una persona ha pedido prestado \$1,000 comprometiéndose a pagar un 15% sobre el saldo, y reducirlo a cero al final del plazo del crédito.

TABLA 5.1. Dos propuestas de inversión con la misma TIR

Año	Propuesta A	Propuesta B
0	-\$1,000	-\$1,000
1	350	150
2	350	150
3	350	150
4	350	1,150

El saldo no recuperado de una inversión en el tiempo t , también se puede encontrar de acuerdo a la siguiente expresión:

$$F_t = F_{t-1} (1 + i^*) + S_t \quad (5.5)$$

Para aclarar la aplicación de la ecuación (5.4) o la (5.5), la tabla 5-2 muestra los saldos no recuperados para cada uno de los años de las propuestas mostradas en la tabla 5-1. A través de la tabla 5-2 se puede comprender mejor el significado de la tasa interna de rendimiento.

Una de las equivocaciones más comunes que se cometen con el significado de la TIR, es considerarla como la tasa de interés que se gana sobre la inversión inicial requerida por la propuesta. Sin embargo, lo anterior es correcto solamente en el caso de propuestas cuyas vidas sean de un período. Para el caso de la propuesta B mostrada en la tabla 5-2, la tasa interna de rendimiento sí indica el rendimiento obtenido sobre la inversión inicial.

En conclusión, de las ideas presentadas en esta sección, surge el significado fundamental de la TIR: "Es la tasa de interés que se gana sobre el saldo no recuperado de una inversión, de tal modo que el saldo al final de la vida de la propuesta es cero".

5.3 EVALUACION DE UN PROYECTO INDIVIDUAL

Con el método de la tasa interna de rendimiento, es necesario calcular la tasa de interés (i^*) que satisface cualquiera de las ecuaciones (5.1), (5.2) o (5.3) y compararla con

TABLA 5-2. Dos propuestas de inversión que demuestran el significado básico de la TIR.

Propuesta	Año	Flujo de efectivo al final del año t	Saldo al comienzo del año t	Intereses sobre el saldo	Saldo al final del año t
A	0	-\$1,000	-	-	-\$1,000.0
	1	350	-\$1,000.0	-\$150.0	- 800.0
	2	350	- 800.0	- 120.0	- 570.0
	3	350	- 570.0	- 85.5	- 305.5
	4	350	- 305.5	- 44.5	0.0
B	0	-\$1,000	-	-	-\$1,000
	1	150	-\$1,000	-\$150	- 1,000
	2	150	- 1,000	- 150	- 1,000
	3	150	- 1,000	- 150	- 1,000
	4	1,150	- 1,000	- 150	0

la tasa de recuperación mínima atractiva (TREMA). Cuando i^* sea mayor que TREMA, conviene que el proyecto sea emprendido.

El método de la tasa interna de rendimiento y los métodos explicados en capítulos anteriores, son equivalentes, es decir, que para un mismo proyecto, con cada uno de estos métodos se llegaría a la misma decisión. Lo anterior puede ser más fácilmente comprendido si se observa la figura 5.2. A través de esta figura, se puede comparar la equivalencia del método de la TIR y el método del valor presente. Por ejemplo, en dicha figura se puede apreciar que si i^* es mayor que TREMA, entonces $VPN(TREMA_1)$ es mayor que cero. Por el contrario, si i^* es menor que TREMA, entonces $VPN(TREMA_2)$ es menor que cero. Por consiguiente, es obvio que con ambos métodos se llegaría a la misma decisión de aceptar o rechazar el proyecto.

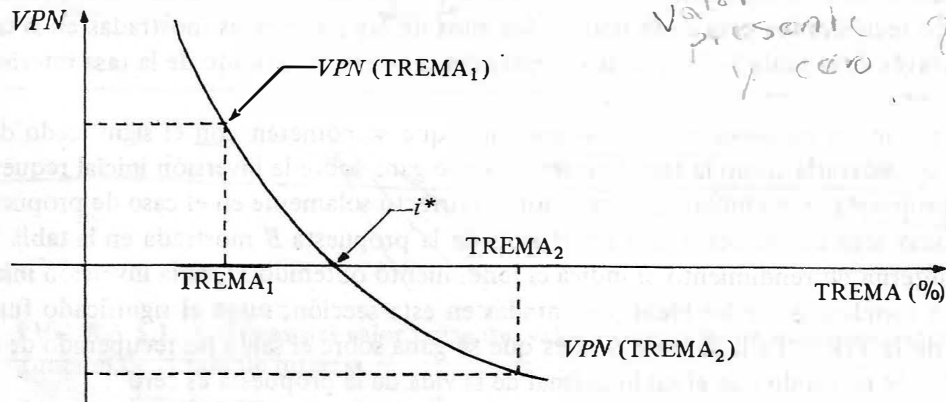


FIGURA 5.2. Valor presente neto y su relación con el método de la TIR.

Para comprender mejor la mecánica de este método, a continuación unos ejemplos son evaluados por el método de la TIR.

Ejemplo 5.1

Suponga que cierto grupo industrial desea incursionar en el negocio de camionetas utilizadas en la exploración y análisis de pozos petroleros. Entre los servicios que este tipo de camioneta puede proporcionar se pueden mencionar los siguientes: la localización y evaluación de zonas petroleras, la determinación de la estructura del terreno en el pozo (rocoso, arenoso, etc.), la estimación de la porosidad y permeabilidad adentro del pozo, la evaluación de la calidad de la cimentación de la tubería, y finalmente se pueden hacer los orificios necesarios a través de los cuales se podrá extraer el fluido. También, considere que la inversión inicial requerida por una camioneta, la cual consiste de una micro-computadora, de un sistema de aire acondicionado que mantiene a la micro-computadora trabajando a una temperatura adecuada, y de un generador que proporciona la energía requerida por la camioneta, es del orden de \$4,000,000. Por otra parte, suponga que los ingresos netos anuales que se pueden obtener en este tipo de negocio son de \$1,500,000. Finalmente, suponga que la vida de la camioneta es de 5 años, al final de los cuales se podría vender en \$500,000 y que la TREMA es de 20%.

Para la información anterior, la tasa interna de rendimiento es la tasa de interés i^* que satisface la ecuación:

$$-4,000,000 + 1,500,000(P/A, i^*, 5) + 500,000(P/F, i^*, 5) = 0$$

y haciendo tanteos se encuentra que $i^* = 27.3\%$. Puesto que i^* es mayor que TREMA, el proyecto deberá ser aceptado.

Ejemplo 5.2

Suponga que una persona adquirió un bono por la cantidad de \$1,000. Si la vida del bono es de 5 años, al final de los cuales se recupera el valor de la inversión, y los intereses que se ganan al final de cada año son de \$200, ¿cuál es la TIR que se obtiene en esta inversión?

La TIR que se obtiene en la compra del bono, es la tasa de interés i^* que satisface la ecuación:

$$-1,000 + 200(P/A, i^*, 5) + 1,000(P/F, i^*, 5) = 0$$

Sin embargo, para los casos en que el valor del rescate es igual a la inversión, la TIR se debe obtener al encontrar la tasa de interés i^* que iguale a cero el valor anual equivalente. Para lograr esto, es necesario utilizar la siguiente identidad:

$$(A/P, i\%, n) = (A/F, i\%, n) + i\% \quad (5.6)$$

Por consiguiente, para encontrar la TIR de esta inversión, es necesario encontrar la tasa de interés i^* que satisface la ecuación:

$$-1,000(A/P, i^*, 5) + 200 + 1,000(A/F, i^*, 5) = 0$$

y utilizando la identidad (5.6) se obtiene:

78 Método de la tasa interna de rendimiento

$$-1,000(A/F, i^*, 5) + i^* + 200 + 1000(A/F, i^*, 5) = 0$$

y simplificando se obtiene que $i^* = 20\%$.

En conclusión, se puede decir que cada vez que el valor de rescate sea igual a la inversión, y los flujos de efectivo netos de cada período sean constantes, la tasa interna de rendimiento no depende de la vida de la propuesta y se obtiene por medio de la siguiente expresión:

$$i^* = \frac{\text{Flujo de efectivo anual neto}}{\text{inversión inicial}} \quad (5.7)$$

5.4 EVALUACION DE PROYECTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

En la evaluación de proyectos mutuamente exclusivos por el método de la TIR, existen dos principios que se deben de tomar muy en cuenta. Estos principios son los siguientes:

- Cada incremento de inversión debe ser justificado, es decir, la alternativa de mayor inversión será la mejor siempre y cuando, la tasa interna de rendimiento del incremento en la inversión sea mayor que TREMA.
- Solamente se puede comparar una alternativa de mayor inversión con una de menor inversión, si ésta ya ha sido justificada.

El criterio usual de selección al utilizar este método, es escoger el proyecto de mayor inversión para el cual todos los incrementos de inversión fueron justificados. Debe ser notado que cuando el método de la TIR es utilizado, seleccionar el proyecto de mayor TIR podría conducir a decisiones subóptimas.

Con el criterio de decisión anterior, se está tratando de maximizar la cantidad de dinero en términos absolutos, en lugar de maximizar la eficiencia en la utilización del dinero. Lo anterior significa que si una determinada empresa ha establecido una TREMA de 20%, dicha empresa preferirá ganar \$250 al hacer una inversión de \$1,000 en lugar de ganar \$10 al hacer una inversión de \$15.

La aplicación del criterio de selección que se recomienda utilizar con el método de la TIR, implica determinar la tasa interna de rendimiento del incremento de inversión. Esta tasa de rendimiento puede ser encontrada por cualquiera de las siguientes alternativas:

- Encontrar la tasa de interés para la cual los valores anuales equivalentes de las dos alternativas son iguales.
- Encontrar la tasa de interés para la cual los valores presentes de las dos alternativas son iguales.
- Encontrar la tasa de interés para la cual el valor presente del flujo de efectivo neto de la diferencia entre las dos alternativas es igual a cero.

Para comprender mejor el criterio de decisión utilizado en el método de la TIR cuando varios proyectos mutuamente exclusivos son comparados, a continuación una serie de ejemplos son presentados.

Evaluación de proyectos mutuamente exclusivos 79

menores a mayor
siendo
mayor - menor

Ejemplo 5.3

Se desea seleccionar de entre los siguientes proyectos de inversión, el más adecuado. Suponga una TREMA de 15%.

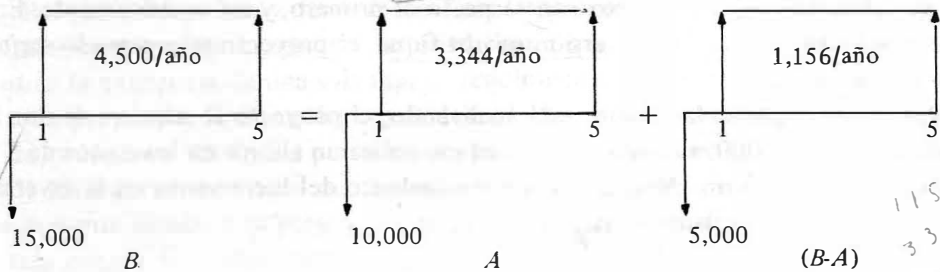
	Propuesta A	Propuesta B
Inversión	\$10,000	\$15,000
Vida	5 años	5 años
Ingresos netos/año	3,344	4,500

De acuerdo al procedimiento descrito anteriormente, es necesario primero justificar el proyecto de menor inversión. En este caso, la TIR del proyecto A es la tasa de interés que satisface la siguiente ecuación:

$$-10,000 + 3,344(P/A, i^*_A, 5) = 0$$

la cual resulta ser de 20%. Como la TIR del proyecto A es mayor que TREMA, entonces, el proyecto de menor inversión ha sido justificado. Cabe señalar que en el caso de que se tengan muchos proyectos, el procedimiento anterior es repetido hasta que el primer proyecto se justifique. Si ningún proyecto es justificado, entonces la mejor decisión sería "no hacer nada".

Una vez que el proyecto A ha sido justificado, el siguiente paso es justificar el incremento en la inversión que requiere el proyecto B. Para tal propósito, vamos a expresar al proyecto B en la forma siguiente:



Del diagrama anterior, se puede observar que el proyecto B puede ser interpretado como la suma del proyecto A (el cual ya ha sido justificado), más una inversión de \$5,000, la cual genera \$1,156 cada año durante 5 años. Lo anterior significa, que el proyecto B debe ser aceptado en lugar del A, si la TIR del incremento en la inversión que requiere, es mayor que TREMA. Esto es obvio, puesto que sería ilógico incrementar la inversión si ésta no produce al menos un rendimiento igual a TREMA. Por consiguiente, la TIR del incremento en la inversión que requiere el proyecto B, es la tasa de interés i^*_{B-A} que satisface la ecuación:

$$-5,000 + 1,156(P/A, i^*_{B-A}, 5) = 0$$

la cual resulta ser de 5%. Puesto que este rendimiento es menor que TREMA, entonces el incremento en la inversión no se justifica y el mejor proyecto es el A.

o sea siempre se toma los dos de menor

B-A
-15,000 + 10,000
-5,000

80 Método de la tasa interna de rendimiento

i^C i^B i^A i^D
 A B C D
 igual
 ① B-A ② C-A ③ D-A
 si sale B
 se le C-B

Ejemplo 5.4

Con el propósito de ilustrar y aclarar la aplicación de esta metodología al caso en el cual solamente los costos son conocidos, enseguida se comparan los siguientes proyectos. Para este análisis se considera una TREMA de 15%.

	Propuesta A	Propuesta B
Inversión	\$10,000	\$15,000
Vida	5 años	5 años
Costos netos/año	4,000	2,600

Como se explicará más adelante, existen flujos de efectivo para los cuales no existe tasa interna de rendimiento. Las propuestas A y B pertenecen a esta categoría, ya que sus flujos de efectivo están formados de puros egresos.

Quando se comparan proyectos donde solamente los gastos son conocidos, se está implícitamente suponiendo cualquiera de las siguientes situaciones: 1) Los proyectos generan los mismos ingresos, ó 2) con todos los proyectos se ahorra la misma cantidad de dinero.

Para comparar proyectos en las circunstancias descritas anteriormente, además de las suposiciones previas, es necesario estimar que el proyecto de menor inversión está justificado de antemano, es decir, cuando solamente los gastos de los proyectos son conocidos, la alternativa "no hacer nada" no puede ser considerada. Por consiguiente, el primer paso en la comparación de proyectos mutuamente exclusivos, sería justificar el incremento en la inversión del segundo proyecto de mayor inversión con respecto al de menor inversión. Si este incremento no se justifica, entonces se tratará de justificar el incremento en la inversión del tercer proyecto con respecto al primero, y así sucesivamente. En caso de que ningún incremento de inversión se justifique, el proyecto seleccionado sería el de menor inversión.

Para el caso particular que se está analizando, el proyecto B requiere de una inversión adicional de \$5,000, a cambio de la cual producirá un ahorro en los costos de \$1,400 por año. Para esta información, la tasa de rendimiento del incremento en la inversión se obtiene al resolver la siguiente ecuación:

$$-5,000 + 1,400(P/A, i^*_{B-A}, 5) = 0$$

y puesto que la tasa de interés (i^*_{B-A}) que satisface la ecuación anterior es 12.37%, entonces el incremento en la inversión no se justifica, y el mejor proyecto es el A.

PROYECTOS CON MULTIPLES TASAS INTERNAS DE RENDIMIENTO

La mayoría de las propuestas de inversión que son analizadas en una empresa, consisten de un desembolso inicial, o una serie de desembolsos iniciales, seguidos por una serie de ingresos positivos. Para estas situaciones, como más adelante se verá, la existencia de una sola tasa interna de rendimiento facilita grandemente el proceso de toma de deci-

siones. Sin embargo, no todas las propuestas de inversión generan flujos de efectivo de este tipo. Para algunas propuestas, los desembolsos requeridos no están restringidos a los primeros períodos de vida de la inversión. Por consiguiente, es posible que en los flujos de efectivo netos existan varios cambios de signo. Para estos casos, es posible que la propuesta presente el fenómeno de tasas múltiples de rendimiento.

Es indudable que la discusión de proyectos con tasas múltiples de rendimiento, aumentará el entendimiento que se tiene del método de la TIR. Por consiguiente, en esta sección del capítulo se describe y explica un método que se recomienda usar cuando la propuesta posee múltiples tasas de rendimiento.

5.5 PROYECTOS SIN TASAS DE RENDIMIENTO

Se debe de reconocer que existen algunos proyectos para los cuales no existe tasa interna de rendimiento. El ejemplo común de esta situación se presenta en los casos en que el flujo de efectivo está formado en su totalidad, ya sea por ingresos o egresos.

Generalmente, los casos más comunes de este tipo son los proyectos para los cuales se conocen solamente los egresos. Para este caso, no es posible determinar la tasa interna de rendimiento de cada proyecto en forma individual. Sin embargo, como ya se explicó anteriormente, sí es posible aplicar el método de la TIR en una forma incremental al análisis y evaluación de proyectos mutuamente exclusivos donde solamente los gastos son conocidos.

5.6 PROYECTOS CON UNA SOLA TASA INTERNA DE RENDIMIENTO

Porque es deseable y fácil de analizar las propuestas con una sola tasa interna de rendimiento, es necesario conocer las condiciones que se tienen que cumplir para que se garantice la existencia de una sola tasa de rendimiento. Se puede decir por norma general, que toda propuesta de inversión cuyos desembolsos ocurran en los primeros períodos de su vida, y los ingresos en los períodos posteriores, y además se cumpla que la suma absoluta de los ingresos es mayor que la suma absoluta de los egresos, tendrá una función de valor presente similar a la presentada en la figura 5.2, es decir, la propuesta tendría una sola tasa interna de rendimiento.

La tabla 5-3 muestra los flujos de efectivos de dos propuestas (*A* y *B*) que sí cumplen con las condiciones anteriores y dos propuestas (*C* y *D*) que no las cumplen. Para la propuesta *A* la suma de los ingresos (\$15,000) es mayor que la suma de los egresos (\$5,000) y para la propuesta *B* también los ingresos (\$6,000) exceden a los egresos (\$3,500). Para estas propuestas sí se garantiza la existencia de una sola tasa interna de rendimiento. Sin embargo, para las propuestas *C* y *D* es posible que sus funciones de valor presente sean diferentes a la mostrada en la figura 5.2.

5.7 PROYECTOS CON MÚLTIPLES TASAS INTERNAS DE RENDIMIENTO

Para la toma de decisiones, los proyectos con una sola tasa interna de rendimiento son mucho más fáciles de manejar que los proyectos con tasas múltiples de rendimiento. Cuando se tienen varias tasas de rendimiento surgen preguntas tales como: ¿Cuál tasa de

TABLA 5-3. Proyectos con diferentes comportamientos de flujos de efectivo.

Año	Propuesta A	Propuesta B	Propuesta C	Propuesta D
0	-\$5,000	-\$2,000	-\$10,000	-\$3,000
1	1,000	- 1,000	5,000	0
2	2,000	- 500	6,000	4,000
3	3,000	1,500	- 15,000	0
4	4,000	2,000	8,000	- 5,000
5	5,000	2,500	10,000	8,000

rendimiento es la correcta? O ¿son aplicables las reglas de decisión para la selección de proyectos cuando se presentan tasas múltiples de rendimiento? La respuesta a estas preguntas se comprenderá mejor cuando se analice el método de James C. T. Mao.

Para identificar la posibilidad de tasas múltiples de rendimiento, a continuación se muestra la expresión para evaluar el valor presente de la propuesta C mostrada en la tabla 5-3.

$$VPN = -10.000 + \frac{5.000}{(1+i)} + \frac{6.000}{(1+i)^2} - \frac{15.000}{(1+i)^3} + \frac{8.000}{(1+i)^4} + \frac{10.000}{(1+i)^5} = 0$$

y sustituyendo $X = 1/(1+i)$ en la ecuación anterior, se obtiene:

$$-10.000 + 5.000X + 6.000X^2 - 15.000X^3 + 8.000X^4 + 10.000X^5 = 0$$

Para este polinomio es posible que existan 5 raíces que satisfagan la ecuación. El número de raíces reales positivas (X) es igual al número de tasas múltiples de rendimiento que tiene la propuesta de inversión. Sin embargo, la pregunta que surge en este momento es: ¿Cuál es el efecto del comportamiento del flujo de efectivo de la propuesta en el número de tasas internas de rendimiento? Una regla útil para identificar la posibilidad de tasas múltiples de rendimiento, es la regla de los signos de Descartes para un polinomio de grado n . Esta regla dice que el número de raíces reales positivas de un polinomio de grado n , con coeficientes reales, no es nunca mayor que el número de cambios de signo en la sucesión de sus coeficientes, en caso de que el número de tales raíces sea menor, la diferencia será un número par.

Por ejemplo, para las propuestas A y B de la tabla 5-3, la regla de los signos indica que no existe más de una tasa de rendimiento. En el caso de las propuestas C y D la regla de Descartes nos indica que el número máximo de raíces reales positivas, es tres.

5.8 ALGORITMO DE JAMES C. T. MAO

La aplicación del algoritmo de James C. T. Mao, requiere que los proyectos sean clasificados en ciertas categorías. Esta clasificación permite visualizar más rápidamente a aquellos proyectos que presentan el fenómeno de tasas múltiples de rendimiento.

5.8.1 Clasificación de los proyectos

Las inversiones en general pueden ser clasificadas de acuerdo al diagrama mostrado en la figura 5.3. En este diagrama se puede observar que las inversiones pueden ser de dos

tipos: simples y no-simples. En los flujos de efectivo de las inversiones simples, solamente puede haber un cambio de signo. Con esto se garantiza la existencia de una sola tasa interna de rendimiento. Por el contrario, en los flujos de efectivo de las inversiones no-simples, pueden existir varios cambios de signo. Las inversiones no-simples a su vez se subdividen en dos tipos: inversiones puras e inversiones mixtas. De estos dos tipos de inversiones, las que presentan el problema de tasas múltiples de rendimiento son las inversiones mixtas. Debe ser notado que aunque las inversiones puras tienen varios cambios de signo en sus flujos de efectivo, éstas solamente tienen una sola tasa interna de rendimiento.

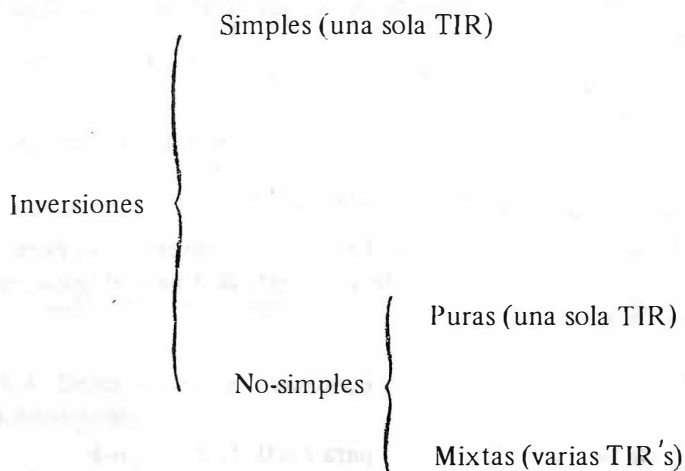


FIGURA 5.3. Clasificación de las inversiones.

La distinción entre inversiones simples y no-simples es muy sencilla, basta con determinar el número de cambios de signo en el flujo de efectivo de la inversión. Sin embargo, la clasificación de las inversiones no-simples en puras y mixtas es más difícil de visualizar. No obstante esta dificultad se han desarrollado dos criterios que resuelven este problema.

Con el primer criterio, una inversión pura está definida como una inversión en la que los saldos no recuperados (ver ecuaciones 5.4 y 5.5) evaluados con la tasa interna de rendimiento de la inversión (i^*) son negativos o ceros a través de la vida de la propuesta. Por consiguiente, una inversión es pura si, y sólo si, $F_t(i^*) < 0$ para $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Por el contrario, una inversión mixta es un proyecto para el cual $F_t(i^*) \geq 0$ para algunos valores de t y $F_t(i^*) \leq 0$ para el resto. Para inversiones puras sí podemos hablar de su tasa interna de rendimiento, mientras que para las mixtas el rendimiento obtenido tiende a variar con la TREMA de la empresa.

Otra forma de clasificar los proyectos es explicada a continuación. Debe ser notado que debido a que la inversión inicial es un desembolso, se puede lograr que cualquier inversión satisfaga la condición $F_t(i) < 0$ para $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$, al incrementar el valor de i a algún valor crítico que llamaremos $r_{mín}$. Con este valor de i , $F_n(r_{mín})$ puede ser positivo, cero, o negativo. Si $F_n(r_{mín}) > 0$, entonces existe alguna tasa de interés r^* (rendimiento sobre el capital invertido) $> r_{mín}$ que hará $F_n(r^*) = 0$. Puesto que $r^* > r_{mín}$, entonces $F_t(r^*) < 0$ para $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$ y por lo tanto la inversión es pura. Sin embargo, si $F_n(r_{mín}) < 0$, existe alguna $r^* < r_{mín}$ que hará $F_n(r^*) = 0$. Puesto que $r_{mín}$ es

84 Método de la tasa interna de rendimiento

la mínima tasa de interés para la que los saldos del proyecto para $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$ son ceros o negativos, el proyecto no será una inversión pura, ya que los saldos no recuperados del proyecto utilizando r^* pueden ser positivos o negativos. Por consiguiente, se puede concluir que una inversión es pura si $F_n(r_{mín}) > 0$, y la inversión será mixta si $F_n(r_{mín}) < 0$.

La tabla 5-4 muestra un resumen de los dos criterios utilizados en la clasificación de las inversiones no-simples en puras y mixtas. Obviamente, de estos dos criterios el más fácil de utilizar es el segundo.

TABLA 5-4. Criterios utilizados en la clasificación de las inversiones no-simples en puras y mixtas.

Criterio 1.

Sea i^* un valor tal que $VPN(i^*) = 0$.

Si $F_t(i^*) \leq 0$ para $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$ entonces la inversión es pura.

Si $F_t(i^*) \leq 0$ para algunos valores de t y $F_t(i^*) \geq 0$ para el resto, entonces la inversión es mixta.

Criterio 2.

Sea $r_{mín}$ un valor tal que $F_t(r_{mín}) \leq 0$ para $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Si $F_n(r_{mín}) > 0$, entonces la inversión es pura

Si $F_n(r_{mín}) < 0$, entonces la inversión es mixta

5.8.2 Descripción de algoritmo

El algoritmo de James C. T. Mao es un procedimiento que se recomienda utilizar en la evaluación de inversiones no-simples. La descripción de este algoritmo se muestra en la figura 5.4. En esta figura, se puede observar que el primer paso en la aplicación de este algoritmo es encontrar por tanteos $r_{mín}$. Con el valor de $r_{mín}$ se evalúa $F_n(r_{mín})$ y se determina si la inversión es pura o mixta. Si la inversión es pura, el problema de tasas múltiples de rendimiento no existe y la evaluación sería similar a la de las inversiones simples. Por el contrario, si la inversión es mixta es necesario calcular r^* (rendimiento sobre el capital invertido) de modo que $F_n(r^*, TREMA) = 0$. Si el rendimiento sobre el capital invertido es mayor que TREMA, el proyecto debe ser aceptado.

La diferencia fundamental entre inversiones puras y mixtas estriba en los saldos del proyecto. En las inversiones puras, el saldo no recuperado de la inversión siempre es negativo, es decir, el proyecto de inversión siempre nos debe y esta deuda se reduce a cero al final de su vida. En las inversiones mixtas, el saldo no recuperado de la inversión puede ser positivo o negativo. Si el saldo es negativo, entonces después de transcurrir un período el proyecto nos deberá una cantidad que depende de r^* . Por otra parte, si el saldo es positivo, entonces significa que se dispone de cierta cantidad de dinero que puede ser invertida a una tasa de interés igual a TREMA.

Para comprender mejor la lógica de este algoritmo, a continuación una serie de ejemplos son presentados.

- Paso 1. Encontrar por intento y error r_{min} .
- Paso 2. Evaluar $F_n(r_{min})$.
- Paso 3. ¿Es $F_n(r_{min}) > 0$? Si la respuesta es afirmativa, entonces el proyecto es una inversión pura y por consiguiente existe una sola tasa interna de rendimiento, la cual deberá ser comparada con TREMA. Si la $TIR > TREMA$ la inversión debe ser aceptada. Por el contrario, si la respuesta es negativa continúe con el paso 4.
- Paso 4. Calcular los saldos no recuperados del proyecto en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 F_t(r^*, TREMA) &= F_{t-1}(1 + r^*) + S_t && \text{si } F_{t-1} < 0 \\
 F_t(r^*, TREMA) &= F_{t-1}(1 + TREMA) + S_t && \text{si } F_{t-1} > 0
 \end{aligned}$$

Paso 5. Determine el valor de r^* de modo que:

$$F_n(r^*, TREMA) = 0$$

si $r^* > TREMA$, entonces el proyecto debe ser aceptado.

FIGURA 5.4. Descripción del algoritmo de James C.T. Mao en la evaluación de inversiones no-simples.

Ejemplo 5.5

Suponga que cierta compañía que usa una TREMA de 25%, se encuentra analizando la deseabilidad económica de una inversión que promete generar la siguiente serie de flujos de efectivo:

Año	0	1	2	3	4
Flujo de efectivo	-200	100	200	-400	1,000

Puesto que la inversión es no-simple, el primer paso del análisis es determinar si el proyecto es una inversión pura o una mixta. Para este proyecto, se van a utilizar los criterios que aparecen en la tabla 5-4. De acuerdo al criterio 1, se requiere encontrar la tasa de interés que iguala a cero el valor presente del proyecto:

$$-200 + \frac{100}{(1 + i^*)} + \frac{200}{(1 + i^*)^2} - \frac{400}{(1 + i^*)^3} + \frac{1,000}{(1 + i^*)^4} = 0 \quad \text{VPM} \quad \begin{matrix} i = 58.7 \\ = -0.004 \end{matrix}$$

y la tasa de interés i^* que satisface la ecuación anterior es 58.7%. Con esta tasa interna de rendimiento los saldos no recuperados del proyecto son:

$$\begin{aligned}
 F_0 (58.7\%) &= -200 && F_1 (58.7\%) &= -217.4 \\
 F_2 (58.7\%) &= -145 && F_3 (58.7\%) &= -630.2 \\
 F_4 (58.7\%) &= 0
 \end{aligned}$$

86 Método de la tasa interna de rendimiento

y puesto que $F_t(58.7\%) < 0$ para $t = 0, 1, 2, 3$ este proyecto no-simple es una inversión pura.

Por otra parte, de acuerdo al segundo criterio, la r_{min} de este proyecto sería la tasa de interés que hace igual a cero el saldo del proyecto al final del año 2. Lo anterior es obvio, puesto que si el saldo en el año 2 es cero, esto significa que el saldo del proyecto al final del año 1 es negativo y con esto se cumpliría que $F_t(r_{min}) < 0$ para $t = 0, 1, 2, 3$. Por consiguiente, r_{min} es la tasa de interés que satisface la siguiente ecuación:

$$-200(1 + r_{min})^2 + 100(1 + r_{min}) + 200 = 0$$

y el valor de r_{min} que resulta de resolver esta ecuación es 28.1%. Con este valor de r_{min} , el saldo del proyecto al finalizar el año 4 sería:

$$F_4(28.1\%) = -400(1 + .281) + 1,000 = 487.6$$

y puesto que este valor es positivo, el proyecto es una inversión pura.

Puesto que la inversión es pura, existe una sola tasa interna de rendimiento que es 58.7%. Como la TIR es mayor que TREMA, el proyecto debe ser aceptado.

Finalmente, es importante señalar que de los criterios presentados para distinguir cuando una inversión es pura o mixta, el segundo es más fácil y rápido de aplicar. Por consiguiente, en los ejemplos subsiguientes se utilizará únicamente este segundo criterio.

Ejemplo 5.6

Suponga que cierta empresa que usa una TREMA de 25%, desea evaluar un proyecto de inversión que promete generar los siguientes flujos de efectivo:

Año	0	1	2	3	4
Flujo de efectivo	-600	800	-600	700	100

Para distinguir si este proyecto es una inversión pura o una mixta, es necesario primero determinar r_{min} y enseguida evaluar $F_4(r_{min})$. Del flujo de efectivo, es obvio que existe una r_{min_1} para el año 0 y 1. Esta r_{min_1} de 33.33% hace que el saldo del proyecto al final del año 1 sea cero. También, del mismo flujo de efectivo se desprende que para el año 2 y 3 existe otra r_{min_2} de 16.67% que hace que el saldo del proyecto al final del año 3 sea cero (considerando el año 2 y 3 únicamente). De estas dos tasas de interés, la que satisface que $F_t(r_{min}) < 0$ para $t = 0, 1, 2, 3$ es 33.33%. Por consiguiente $r_{min} = 33.33\%$. De este análisis se puede concluir que no existe ninguna regla o receta que facilite la determinación del valor de r_{min} . Lo único que se tiene que cumplir es que $F_t(r_{min}) < 0$ para $t = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$.

Con el valor de $r_{min} = 33.33\%$, el saldo del proyecto al final del año 4 sería:

$$F_4(33.33\%) = -600(1 + .333)^2 + 700(1 + .333) + 100 = -33.33$$

y puesto que este valor es negativo, el proyecto es una inversión mixta.

Como el proyecto es una inversión mixta, el siguiente paso de acuerdo a la figura 5.4, es encontrar el rendimiento sobre el capital invertido r^* . El valor de r^* se obtiene al resolver la siguiente ecuación:

$$F_4(r^*, \text{TREMA}) = 0$$

Normalmente el procedimiento para encontrar el valor de r^* requiere de una serie de tanteos. Sin embargo, se recomienda que el primer tanteo para r^* sea un valor igual a TREMA. De esta manera, si $F_4(r^*, \text{TREMA}) > 0$, entonces significa que $r^* > \text{TREMA}$ y el proyecto debe ser aceptado. Por el contrario, si $F_4(r^*, \text{TREMA}) < 0$, entonces significa que $r^* < \text{TREMA}$ y el proyecto debe ser rechazado. Por consiguiente, si $r^* = 25\%$, el saldo del proyecto al final del año cuatro sería:

$$F_4(25\%) = -600(1.25)^4 + 800(1.25)^3 - 600(1.25)^2 + 700(1.25) + 100 = 135$$

puesto que este valor es positivo, $r^* > 25\%$ y el proyecto debe ser aceptado. Para determinar el valor exacto de r^* , es necesario hacer una serie de tanteos hasta que su valor exacto es determinado. Por ejemplo, el siguiente tanteo para r^* será de 31%. Con este valor de r^* , los saldos del proyecto para cada uno de sus años serían:

$$\begin{aligned} F_0 &= -600 \\ F_1 &= -600(1 + .31) + 800 = 14 \\ F_2 &= 14(1 + .25) - 600 = -582.5 \\ F_3 &= -582.5(1 + .31) + 700 = -63.08 \\ F_4 &= -63.08(1 + .31) + 100 = 17.32 \end{aligned}$$

y como el saldo del proyecto al final del año 4 es positivo, es necesario aumentar el valor de r^* para satisfacer que $F_4(r^*, \text{TREMA}) = 0$. Por consiguiente, el siguiente tanteo para r^* será de 32%. Con este nuevo valor de r^* , los saldos del proyecto serían:

$$\begin{aligned} F_0 &= -600 \\ F_1 &= -600(1 + .32) + 800 = 8 \\ F_2 &= 8(1 + .25) - 600 = -590 \\ F_3 &= -590(1 + .32) + 700 = -78.80 \\ F_4 &= -78.8(1 + .32) + 100 = -4.01 \end{aligned}$$

y puesto que el saldo del proyecto al final del año 4 es negativo, el valor exacto de r^* está entre 31% y 32%. Interpolando entre estos valores se encuentra que $r^* = 31.8\%$.

PROBLEMAS

- 5.1 Un cierto componente que es utilizado en la producción de un producto fabricado por la compañía X , tiene actualmente un costo de \$100/unidad. La compañía X con el propósito de ahorrarse la gran cantidad de dinero que anualmente se gasta en la compra de este componente, está analizando la posibilidad de comprar el equipo necesario para su producción. Investigaciones preliminares del equipo re-