

Análisis de un Sistema de Colas de un solo Canal de una Sola Línea de Llegada Exponencial y Proceso de Servicio (M/M/1)

El análisis de un sistema de colas M/M/1 consiste en lo siguiente:

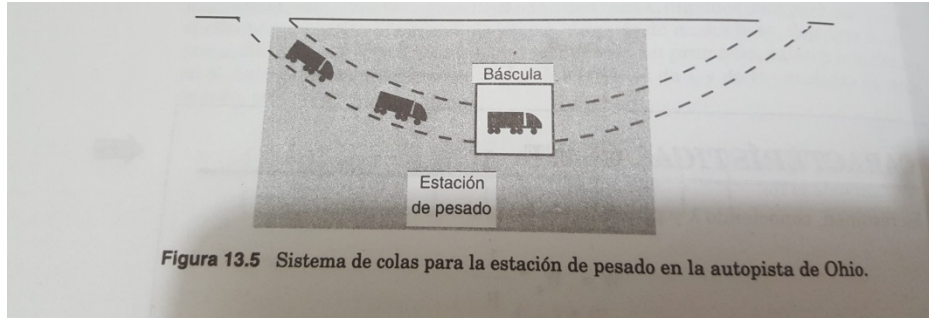
1. Una población de clientes finita
2. Un proceso de llegada en el que los clientes se presentan de acuerdo con un proceso Poisson con una tasa promedio de λ clientes por unidad de tiempo.
3. Un proceso de colas que consiste en una sola línea de espera de capacidad infinita, con una disciplina de colas de primero en entrar primero en salir.
4. Un proceso de servicio que consiste en un solo servidor que atiende a los clientes de acuerdo con una distribución exponencial con un promedio de μ clientes por unidad de tiempo.

Para que este sistema alcance una condición de estado deseable, la "tasa de servicio promedio" μ debe ser mayor que la "tasa de llegadas promedio" λ . De no ser así, la cola del sistema continuaría creciendo debido a que llegarían más clientes que los que pueden ser atendidos por unidad de tiempo.

Considere el problema de Ohio Turnpike Commission.

La Comisión de la Autopista de Ohio (Ohio Turnpike Commission, OTC) tiene un número de estaciones para el pesado de camiones a lo largo de la autopista de cuota de Ohio para verificar que los vehículos cumplen con las regulaciones federales. La OTC, quiere mejorar la calidad del servicio y ha seleccionado una de las instalaciones como modelo a estudiar antes de instrumentar los cambios.

Análisis de un Sistema de Colas de un solo Canal de una Sola Línea de Llegada Exponencial y Proceso de Servicio (M/M/1)



El gerente procede a estimar las tasas promedio de llegada y de servicio en dicha estación:

$$\lambda = \text{mero promedio de camiones que llegan por hora} = 60$$

$$\mu = \text{mero promedio de camiones que pueden ser pesados por hora} = 66$$

Así pues, puede hacerse un análisis de estado estable del sistema.

Cálculo de las medidas de rendimiento para un modelo M/M/1:

Las medidas de rendimiento a menudo se expresan en términos de la "intensidad de tráfico", ρ que es el cociente λ/μ , de esta forma, para el ejercicio anterior, la intensidad de tráfico es 0.9091.

Mientras más cerca está ρ de 1, más cargado estará el sistema, lo cual tiene como resultado colas más largas y tiempos de espera más grandes.

Análisis de un Sistema de Colas de un solo Canal de una Sola Línea de Llegada Exponencial y Proceso de Servicio (M/M1)

Medidas de rendimiento:

5. Probabilidad de que no haya clientes en el sistema (P_0):

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0.9091 = 0.0909$$

6. Número promedio en la fila (L_q):

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{0.9091^2}{1 - 0.9091} = 9.0909$$

7. Tiempo promedio de espera en la cola (W_q):

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{9.0909}{60} = 0.1515$$

8. Tiempo promedio de espera en el sistema (W):

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.1515 + \frac{1}{66} = 0.1667$$

9. Número promedio en el sistema (L):

$$L = \lambda * W = 60 * 0.1667 = 10$$

10. Probabilidad de que un cliente que llega tenga que esperar (p_w):

$$p_w = 1 - P_0 = 0.9091$$

Análisis de un Sistema de Colas de un solo Canal de una Sola Línea de Llegada Exponencial y Proceso de Servicio (M/M1)

11. Probabilidad de que haya n clientes en el sistema (P_n):

$$P_n = \rho^n * P_0$$

n	P_n
0	0.0909
1	0.0826
2	0.0751
3	0.0683
.	.
.	.
.	.

Esta tabla proporciona la distribución de probabilidad para el número de camiones que se encuentran en el sistema. Se podría, con esta información, contestar preguntas como: ¿Cuál es la probabilidad de que no haya más de tres camiones en el sistema? En tal caso, la respuesta es 0.3169, resultado de la suma de las primeras cuatro probabilidades, para $n = 0,1,2$ y 3 .

12. Utilización

$$U = \rho = 0.9091$$

Análisis de un Sistema de Colas de un solo Canal de una Sola Línea de Llegada Exponencial y Proceso de Servicio (M/M1)

Interpretación de las medidas de rendimiento

Al evaluar el sistema actual, la OTC encuentra que muchas medidas de rendimiento están dentro de los intervalos aceptables. Por ejemplo, un tiempo de espera de $W = 10$ minutos para que un chofer pueda pasar por el proceso de pesado es algo razonable. Se tiene que un promedio $L_q = 9$ camiones esperando para ser pesados es tolerable, pues la rampa de salida de la carretera tiene una capacidad de 15 camiones, pero la gerencia está preocupada pues hay ocasiones en que la cola llega hasta la autopista.

Para calcular la probabilidad de que esto suceda, debe calcularse la probabilidad de que el número de camiones en el sistema sea de 17 o más (uno siendo atendido y 16 o más esperando en la rampa). Este número se obtiene sumando las probabilidades P_n , de que n camiones se encuentren en el sistema (para $n = 17, 18, \dots$), o lo que es lo mismo:

$$1 - (\text{Probabilidad de que haya 17 o más camiones en el sistema}) = \\ (\text{Probabilidad de que haya menos de 17 camiones en el sistema}) = P_1 + P_2 + \dots + P_{16} = 0.20$$

...es decir, aproximadamente el 20% de los camiones sobrepasarán la rampa completo y llegarán hasta la autopista, lo cual se considera no aceptable.