

Problema: Protrac, INC.³

PROTRAC, Inc. Produce dos líneas de maquinaria pesada. Una de sus líneas de productos, llamado equipo de excavación, se utiliza de manera primordial en aplicaciones de construcción. La otra línea, denominada equipo para la silvicultura, está destinada a la industria maderera. Tanto la máquina más grande de la línea de equipo de excavación (la E-9), como la mayor de toda la maquinaria de equipo para la silvicultura (la F-9) son fabricadas en los mismos departamentos y con el mismo equipo. Empleando las proyecciones económicas correspondientes al siguiente mes, el gerente de mercadotecnia de PROTRAC ha considerado que durante ese periodo será posible vender todas las E-9 y F-9 que la compañía sea capaz de producir. La gerencia tiene que recomendar ahora una meta de producción para el mes próximo. Es decir, ¿cuántas E-9 y F-9 deberán fabricar si la dirección de PROTRAC desde maximizar la contribución del mes entrante a las ganancias (es decir, el margen de contribución, definido como los ingresos menos los costos variables)?

LOS DATOS DE PROTRAC¹

La toma de esta decisión requiere la consideración de los siguientes factores importantes:

1. El margen de contribución unitario de PROTRAC es de \$5000 por cada E-9 vendida y de \$4000 por cada F-9.
2. Cada producto pasa por las operaciones de maquinado, tanto en el departamento A como en el B.
3. Para la producción correspondiente al mes próximo, estos dos departamentos tienen tiempos disponibles de 150 y 160 horas, respectivamente. La fabricación de cada E-9 requiere 10 horas de maquinado en el departamento A y 20 en el departamento B, mientras que la de cada F-9 requiere 15 horas en el departamento A y 10 en el B. Estos datos aparecen en la siguiente tabla

Datos de torneado de PROTRAC			
	Horas		
Departamento	Por E-9	Por F-9	Total disponible
A	10	15	150
B	20	10	160

¹ Véase en Eppen, G.D., et al.

Problema: Protrac, INC.³

- Para que la administración cumpla un acuerdo concertado con el sindicato, las horas totales de trabajo invertidas en la prueba de productos terminados del siguiente mes no deben ser más allá del 10% inferior a una meta convenida de 150 horas. Estas pruebas se llevan a cabo en un tercer departamento y no tienen nada que ver con las actividades de los departamentos A y B. Cada E-9 es sometida a pruebas durante 30 horas y cada F-9 durante 10. Dado que el 10% de 150 es 15, las horas destinadas a las pruebas no pueden ser menores que 135. Esta información está en la siguiente tabla.

Datos de prueba de PROTRAC			
	1 E-9	1 F-9	Horas totales requeridas
Horas prueba	30	10	135

- Con el fin de mantener su posición actual en el mercado, la alta gerencia ha decretado como política operativa: deberá construirse cuando menos una F-9 por cada tres E-9 que sean fabricadas.
- Uno de los principales distribuidores ha ordenado un total de cuando menos cinco E-9 y F-9 (en cualquier combinación) para el próximo mes, por lo cual tendrá que producirse por lo menos esa cantidad.

Procedamos a mostrar la manera de expresar este problema como un modelo de optimización y particularmente como un programa lineal. Para ello, tendremos que identificar las restricciones y la función objetivo.

Problema: Protrac, INC.³

Restricciones²

Hemos indicado que en cada departamento es limitado el tiempo disponible para las operaciones de maquinado durante la fabricación de las E-9 y F-9. Por ejemplo, para el periodo considerado, no hay más de 150 horas disponibles en el departamento A. Esta disponibilidad limitada de horas es una restricción. Para formular de manera concisa tal restricción, comencemos por determinar las horas que se invertirán en el departamento A. Sabemos que cada E-9 requerirá 10 horas de maquinado en dicho departamento. Cada F-9 empleará 15 horas en el departamento A. Por tanto, para cualquier plan de producción,

$$10(\# \text{ de } E - 9 \text{ producidas}) + 15(\# \text{ de } F - 9 \text{ producidas}) \\ = \text{horas totales en el depto. A}$$

Esto se puede expresar utilizando la siguiente notación,

$$E = \text{cantidad de } E - 9 \text{ por producir} \\ F = \text{cantidad de } F - 9 \text{ por producir}$$

Entonces la expresión del total de horas usadas en el departamento A se convierte en

$$10E + 15F = \text{total de horas empleados en el departamento A.}$$

Pero como hay un máximo de 150 horas disponibles en el departamento A, según hemos dicho, de aquí se desprende que las variables de decisión E y F tendrán que satisfacer la condición,

$$10E + 15F \leq 150$$

También, observamos que por cada E-9 producida se utilizarán 20 horas y por cada F-9 se emplearán 10 horas de torneado en el departamento B. Dado que hay a lo sumo 160 horas disponibles en el departamento B, se desprende que los valores de E y F tendrán que cumplir también con

$$20E + 10F \leq 160$$

Las consideraciones principales nos muestran que existe también un acuerdo con el sindicato que debe ser respetado. Para cada E-9 fabricada se requerirán 30 horas de pruebas y para cada F-9, 10 horas. Por consiguiente

$$30E + 10F = \text{horas totales empleadas para las pruebas}$$

² Véase en Eppen, G.D., et al.

Problema: Protrac, INC.³

El total de las horas de mano de obra para las pruebas no puede ser menor que 135. Así, obtenemos la restricción,

$$30F + 10E \geq 135$$

Otra restricción indica que debe producirse cuando menos una F-9 por cada tres E-9. Esa situación se expresa como

$$\frac{E}{3} \leq F$$

Así,

$$E - 3F \leq 0.$$

Otra consideración establece que es preciso producir cuando menos cinco unidades el próximo mes, en cualquier combinación. Esta restricción se expresa

$$F + E \geq 5$$

Puesto que no tiene sentido producir una cantidad negativa de equipos E-9 o F-9, tendremos que incluir dos condiciones adicionales

$$E \geq 0, F \geq 0$$

En resumen,

$$10E + 15F \leq 150$$

$$20E + 10F \leq 160$$

$$30F + 10E \geq 135$$

$$E - 3F \leq 0$$

$$F + E \geq 5$$

$$E \geq 0, F \geq 0$$

Problema: Protrac, INC.³

Función objetivo³

De todas las decisiones permisibles, o factibles, ¿Cuál deberá aplicarse? Cada modelo de PL tiene un objetivo específico. La dirección de PROTRAC, Inc. Se propone maximizar las ganancias del próximo mes. Las ganancias provienen de dos objetivos:

1. Una contribución a las ganancias proviene de la venta de equipos E-9.
2. Otra contribución a las ganancias proviene de la venta de equipos F-9.

Mencionamos que el margen de contribución unitaria es de \$5000 por cada E-9 y de \$4000 por cada F-9. Dado que PROTRAC gana \$5000 por cada E-9 y que E indica la cantidad de máquinas E-9 por producir, vemos que

$$5000 * E = \text{contribución a las ganancias por la producción de } E \text{ unidades de E} - 9$$

de forma similar,

$$4000 * F = \text{contribución a las ganancias por la producción de } F \text{ unidades de F} - 9$$

por tanto, la decisión de producir E unidades de E-9 y F unidades de F-9 alcanza una contribución total a las ganancias expresadas por

$$\text{contribución total a las ganancias} = 5000 E + 4000 F$$

Entonces, la función objetivo es

$$\text{Max } 5000E + 4000F$$

³ Véase en Eppen, G.D, et al.

Problema: Protrac, INC.³

Modelo PROTRAC

El modelo de PL simbólico es

$$\text{Max } 5000E + 4000F \text{ (función objetivo)}$$

sujeto a (s. a.)

$$10E + 15F \leq 150 \text{ (horas en el departamento A)}$$

$$20E + 10F \leq 160 \text{ (horas en el departamento B)}$$

$$30F + 10E \geq 135 \text{ (horas de pruebas)}$$

$$E - 3F \leq 0 \text{ (restricción de mezcla)}$$

$$F + E \geq 5 \text{ (requerimientos totales)}$$

$$E \geq 0, F \geq 0 \text{ (condiciones de no negatividad)}$$

Observaciones del modelo PL

1. Un programa lineal (PL) siempre tiene una función objetivo (que deberá maximizarse o minimizarse) y restricciones

Todas las funciones (objetivo y restricciones) del problema son funciones