

# Procesos de un Sistema de Colas

Existen dos clases básicas de tiempos entre llegadas:

1. Determinísticos, en el cual clientes sucesivos llegan a un mismo intervalo de tiempo, fijo y conocido. Un ejemplo clásico es el caso de una línea de ensamblaje, en donde los artículos llegan a una estación en intervalos invariables de tiempo (conocidos como ciclos de tiempo).
2. Probabilísticos, en el cual el tiempo entre llegadas sucesivas es incierto y variable. Los tiempos entre llegadas probabilísticos se describen mediante una distribución de probabilidad.

En el caso probabilístico, la determinación de la distribución real, a menudo, resulta difícil. Sin embargo, una distribución, la distribución exponencial, ha probado ser confiable en muchos problemas prácticos. La función de densidad para una distribución exponencial depende de un parámetro, digamos  $\lambda$  (lambda), y dicha distribución está dada por:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

donde  $\lambda$  es el número promedio de llegadas por unidad de tiempo.

De igual forma, la misma función de densidad se podría expresar de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}}$$

donde  $\theta$  es el tiempo promedio entre eventos (llegadas).

# Procesos de un Sistema de Colas

Es decir, note que existe una relación inversa entre el parámetro  $\lambda$  y  $\mu$ , siendo que la primera expresa un “promedio en términos de cantidad de eventos” y el segundo en “términos del tiempo promedio”.

Siguiendo ahora con la primera notación (en términos de  $\lambda$ ), con una cantidad  $T$  de tiempo, se puede hacer uso de la función de densidad para calcular la probabilidad de que el siguiente cliente llegue dentro de las siguientes  $T$  unidades a partir de la llegada anterior, de la siguiente manera:

$$P(Y \leq T) = 1 - e^{-\lambda * T}$$

O bien,

$$P(\text{tiempo entre llegadas} \leq T) = 1 - e^{-\lambda * T}$$

Ejemplo:

Los clientes de un banco llegan con una rapidez promedio de  $\gamma = 20$  por hora, y si un cliente acaba de llegar, entonces la probabilidad de que el siguiente llegue dentro de los siguientes diez minutos (es decir,

$$P(\text{tiempo entre llegadas} \leq T) = 1 - e^{-20 * (\frac{1}{6})}$$

$$P(\text{tiempo entre llegadas} \leq T) = 1 - 0.036$$

$$P(\text{tiempo entre llegadas} \leq T) = 0.964$$

# Procesos de un Sistema de Colas

Otro planteamiento igualmente válido para describir el proceso de llegadas consiste en utilizar la distribución de probabilidad del número de llegadas. Por ejemplo, usted podría estar interesado en la probabilidad de que dos clientes lleguen dentro de los diez minutos siguientes. Cuando la distribución de tiempos entre llegadas es una función exponencial con parámetro  $\lambda$ , la distribución de probabilidad para el número de llegadas se conoce como distribución Poisson, y está dada por:

$$P(\text{tiempo entre llegadas} = T) = \frac{e^{-\lambda * T} (\lambda * T)^k}{k!}$$

En la que  $k! = k * (k - 1) * \dots * (2) * (1)$

Por ejemplo, cuando  $\lambda = 20$  clientes por hora, y de  $T = 1/6$  de hora, la probabilidad que lleguen  $k = 2$  clientes en los siguientes diez minutos es:

$$P(\text{tiempo de llegada en 10 minutos} = 2) = \frac{e^{-(20) * (\frac{1}{6})} (20/6)^2}{2!}$$

$$P(\text{tiempo de llegada en 10 minutos} = 2) = \frac{0.036 * 11.111}{2}$$

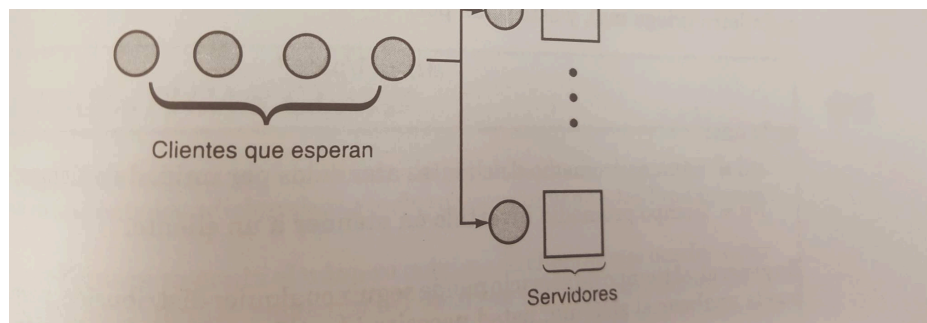
$$P(\text{tiempo de llegada en 10 minutos} = 2) = 0.20$$

En este caso el proceso de llegadas obedece a un proceso Poisson, aunque, en general, un proceso de llegadas puede obedecer a cualquier otra distribución.

# Procesos de un Sistema de Colas

## El proceso de colas

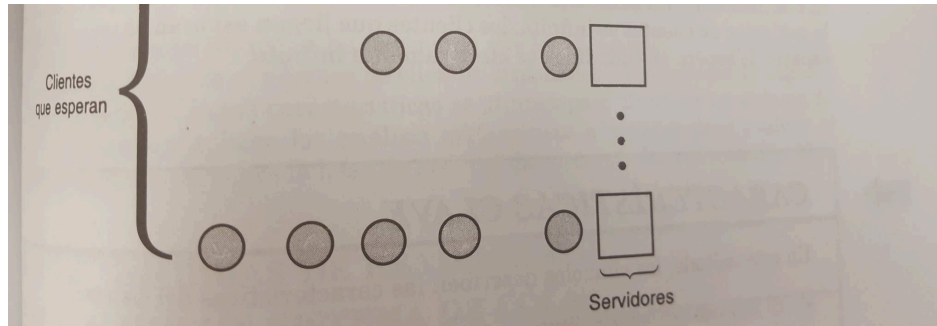
Parte del proceso de colas tiene que ver con la forma en que los clientes esperan para ser atendidos. Los clientes pueden esperar en una sola fila, como en un banco. Observe la siguiente figura:



A éste se le considera un "sistema de colas de una sola línea".

Al contrario, los clientes pueden elegir una de varias filas en la que deben esperar a ser atendidos, como en las cajas cobradoras en un supermercado; observe la siguiente figura:

# Procesos de un Sistema de Colas



A éste se le considera un “sistema de colas de líneas múltiples”.

Otra característica del proceso de colas es el número de espacios de espera en cada fila, es decir, el número de clientes que pueden esperar (o que esperarán) para ser atendidos en cada línea. En algunos casos, como en un banco, ese número es bastante grande y no significa ningún problema práctico, pues para cuestiones de análisis la cantidad de espacio de espera se considera infinita. En contraste, un sistema telefónico puede mantener solamente un número finito (es decir, limitado) de llamadas, después del cual las llamadas subsecuentes no tienen acceso al sistema. Las condiciones de espacio de espera infinito y finito requieren análisis matemáticos diferentes.

Cuando existen múltiples estaciones de servicio secuenciales se le conoce como **“Red de Colas”**, y sigue el mismo razonamiento lógico que el de una sola estación. La tasa de llegada de una estación a la que le precede otra estación, estará dada por la tasa de salida de esta última.

Una característica más es la “disciplina de colas”, es decir, la forma en que los clientes que esperan son seleccionados para ser atendidos. A continuación se presentan algunas de las formas más comunes:

# Procesos de un Sistema de Colas

1. Primero en entrar, primero en salir (PEPS). Los clientes son atendidos en el orden en que van llegando a la fila. Los clientes de un banco y de un supermercado, por ejemplo, son atendidos de esta manera.
2. Último en entrar, primero en salir (VEPS). El cliente que ha llegado más recientemente es el primero en ser atendido. Un ejemplo de esta disciplina se da en un proceso de producción en el que los productos llegan a una estación de trabajo y son apilados uno encima del otro. El trabajador elige, para su procesamiento, el producto que está en la cima de la pila, que fue el último que llegó para ser procesado o para brindarle el servicio.
3. Selección de prioridad. A cada cliente que llega se le da una prioridad y se le elige según ésta para brindarle el servicio. Un ejemplo son los pacientes que llegan a la sala de urgencias de un hospital. Mientras más severo sea el caso, mayor será la prioridad del cliente.

## El proceso de servicio

El proceso de servicio define cómo son atendidos los clientes. En algunos casos puede existir más de una estación en el sistema en la cual se proporcione el servicio requerido.

Los bancos y los supermercados, de nuevo, son buenos ejemplos de los anteriores. Cada ventanilla y cada caja registradora son estaciones que proporcionan el mismo servicio. A tales estructuras se les conoce como “sistemas de colas de canal múltiple”. En dichos sistemas, los servidores pueden ser idénticos, en el sentido de que proporcionan el mismo tipo de servicio con igual rapidez. En esta sección se trabajará con este último tipo de sistemas.

Al contrario de un sistema de canal múltiple, considere un proceso de producción con una estación de trabajo que proporciona el servicio requerido. Todos los productos deben pasar por esta estación de trabajo; en este caso se trata de un “sistema de colas de canal sencillo”.

Otra característica del proceso de servicio es el número de clientes atendidos al mismo tiempo en una estación.

# Procesos de un Sistema de Colas

Otra característica más de un proceso de servicio es si se permite o no la prioridad, esto es, ¿Puede un servidor detener el proceso con el cliente que está atendiendo para dar lugar a un cliente que acaba de llegar?, por ejemplo, una sala de urgencias. En este caso, no se considerará dar prioridad.

Al igual que en el caso del “proceso de llegada”, el tiempo del proceso de servicio puede ser **determinístico** o **probabilístico**.

Los tiempos de servicio probabilísticos pueden modelarse estadísticamente mediante la distribución exponencial. En este caso, su función de densidad depende de un parámetro  $\mu$ , y está dada por:

$$s(t) = \left(\frac{1}{\mu}\right) e^{-\mu*t}$$

Donde:

$\mu = nv$ ? mero promedio de clientes atendidos por unidad de tiempo