Objetivos múltiples[1]

En muchas aplicaciones, se suelen perseguir más de un objetivo. La presencia de objetivos múltiples se describe frecuentemente como el problema de "combinar manzanas y naranjas".

Por ejemplo, la persona que planea y organiza una empresa cuyas metas a largo plazo son: (1) maximizar ganancias por concepto de descuentos, (2) maximizar la participación de la firma en el mercado al final del periodo de planeación, y (3) maximizar el capital en equipo físico existente al final de dicho periodo. Estas metas no son conmensurables, es decir, no es posible combinarlas o compararlas directamente.

Programación por metas[2]

Se aplica generalmente a modelos lineales; es una extensión de la PL que permite al analista aproximarse lo más posible para satisfacer diversas metas y restricciones.

Con dicha extensión la persona que toma las decisiones puede incorporar, por lo menos en un sentido heurístico, su propio sistema de preferencias al enfrentarse a múltiples metas antagónicas.

Ilustraremos el método de programación por metas con varios ejemplos.

---

[1] Véase en Eppen, G.D, etal.
[2] Véase en Eppen, G.D, etal.
[3] Véase en Eppen, G.D, etal.

Suponga que tenemos un modelo de diseño de programa educacional con variables de decisión x_1 y x_2, donde x_1 representa las horas de trabajo en el aula y x_2 son las horas de trabajo en el laboratorio. Suponga que tenemos la siguiente restricción sobre el total de horas del programa:

$$x_1 + x_2 \leq 100 \text{ (total de horas del programa)}$$

En el enfoque de programación por metas hay dos tipos: (1) restricciones del sistema (llamadas restricciones duras), que no pueden ser violadas, y (2) restricciones de metas (llamadas restricciones blandas), que pueden ser violadas en caso necesario.

La restricción anterior referente al total de horas del programa es un ejemplo de una restricción del sistema.

Supongamos que cada hora de trabajo en el aula incluye 12 minutos de experiencia en grupos pequeños y 19 minutos para la resolución individual de problemas, en tanto que cada hora de trabajo en el laboratorio incluye 29 minutos de experiencia en grupos pequeños y 11 minutos para la resolución individual de problemas. Observe que el tiempo total del programa es de 6,000 minutos como máximo. Los autores de este modelo persiguen las dos metas siguientes: cada estudiante debe dedicar al trabajo en grupos pequeños una proporción de tiempo que se aproxime lo más posible a la cuarta parte del tiempo máximo del programa, y un tercio de dicho tiempo deberá dedicarlo a la resolución de problemas. Estas condiciones se expresan así:

$$12x_1 + 19x_2 \approx \frac{100 \times 60}{4} = 1500$$
$$29x_1 + 11x_2 \approx \frac{100 \times 60}{3} = 2000$$

Si fuera factible encontrar una política que satisficiera exactamente las metas sobre grupos pequeños y resolución de problemas (es decir, que cumpliera exactamente con los requisitos correspondientes a los dos miembros derechos), sin violar la restricción del sistema sobre el total de horas del programa, esa sería la política que resolviera el modelo. Sin embargo, un sencillo análisis geométrico nos mostrará que tal política no existe.

Para aplicar el enfoque de programación por metas, la condición sobre la experiencia en grupos pequeños se escribe de nuevo como la restricción de la meta:

$$12x_1 + 19x_2 + u_1 - v_1 = 1500\ (u_1 \geq 0, v_1 \geq 0),$$

donde

u_1 = cantidad por la cual la experiencia en grupos pequeños es inferior a 1,500.

v_1 = cantidad por la cual la experiencia en grupos pequeños excede los 1,500 minutos.

A las variables u_1 y v_1 se les llama variables de desviación porque miden en qué cantidad el valor producido por la solución se desvía de la meta. Observamos que, por definición, queremos que u_1 o v_1 (o ambas) sean cero, porque es imposible que al mismo tiempo sean menores y mayores que 1,500. Para que $12x_1 + 19x_2 12x_1 + 29x_2$ se aproxime lo más posible a 1,500, basta hacer que $|v_1 - u_1|\ v_1 + u_1$ sea casi cero.

En forma similar, la condición referente a la resolución individual de problemas se expresa como la siguiente restricción sobre la meta:

$$29x_1 + 11x_2 + u_2 - v_2 = 2000\ (u_2 \geq 0, v_2 \geq 0)$$

Y en este caso queremos que la suma de las dos variables de desviación $u_2 + v_2$ sea un número pequeño.

Nuestro modelo completo se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{gathered}
min\ u_1 + v_1 + u_2 + v_2 \\
s.a.: x_1 + x_2 \leq 100 (total\ de\ horas\ programadas) \\
12x_1 + 19x_2 + u_1 - v_1 = 1500\ (experiencia\ en\ grupos\ pequeños) \\
29x_1 + 11x_2 + u_2 - v_2 = 2000\ (resoluciv = n\ de\ problemas) \\
x_1, x_2, u_1, v_1, u_2, v_2 \geq 0
\end{gathered}$$

Nota: Tanto u_1 y v_1 no pueden ser > 0 al mismo tiempo. Lo mismo para u_2 y v_2.

Este es un modelo PL ordinario y puede resolverse de manera convencial.

[4] Véase en Eppen, G.D, etal.

Por supuesto, esa falta de preferencia por una u otra solución no es un rango común de todos los modelos de programación por metas. Las diferencias de unidades pueden dar lugar a alguna preferencia entre las distintas variables de desviación. Supongamos, por ejemplo, que la restricción sobre la resolución de problemas en forma individual se hubiera expresado en horas, es decir, como

$$\frac{19}{60}\boldsymbol{x}_1 + \frac{11}{60}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{v}_2 = \frac{2000}{60}$$

Una forma de expresar la preferencia entre las diversas metas consiste en asignar distintos coeficientes a las variables de desviación de la función objetivo. En el ejemplo de planeación, podríamos seleccionar

$$\boldsymbol{min}\ 10\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{v}_1 + 20\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2$$

como función objetivo.

Puesto que $\boldsymbol{v}_2$(con valor excedente en la solución del problema) tiene el coeficiente más pequeño, los creadores del programa preferirían una $\boldsymbol{v}_2$ positiva, mejor que cualquier de las otras variables de desviación.

Otro tipo de restricción de metas se conoce como la restricción del intervalo meta. Dicha restricción limita la meta a un rango in intervalo determinado, un lugar de limitarla a un valor numérico específico. Supongamos que en el ejemplo anterior los creadores del modelo no tuvieran preferencia alguna entre distintos programas, en los cuales

$$1800 \leq \boldsymbol{minutos\ de\ resoluciv} = \boldsymbol{n\ individual\ de\ problemas} \leq 2100$$

es decir,

$$800 \leq 19\boldsymbol{x}_1 + 11\boldsymbol{x}_2 \leq 2100$$

[5] Véase en Eppen, G.D, etal.
[6] Véase en Eppen, G.D, etal.

en este caso, la meta del intervalo se expresa mediante dos restricciones sobre la meta:

$$19\boldsymbol{x}_1 + 11\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{v}_1 \leq 2100(\boldsymbol{v}_1 \geq 0)$$
$$19\boldsymbol{x}_1 + 11\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{u}_1 \geq 1800(\boldsymbol{u}_1 \geq 0)$$

Cuando los términos $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{v}_1$ están incluidos en la función objetivo, el programa PL tratará de minimizarlos.