Distribuciones Estacionarias

Sea $\boldsymbol{X_n}$, una cadena de Markov con espacio de estados E y matriz de transición P. Sea $\boldsymbol{\pi(i)}$, con $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{E}$, una distribución de probabilidad, es decir,

$$\boldsymbol{\pi(i) \geq 0, para\ todo\ i \in E; y \sum_{i \in E} \pi(i).}$$

Si…

$$\boldsymbol{\sum_{i \in E} \pi(i) P_{ij} = \pi(j), \quad j \in E,}$$

…decimos que $\boldsymbol{\pi}$ es una distribución estacionaria o una medida invariante para la cadena $\boldsymbol{X_n}$.

Observación 1

Para una cadena con espacio de estados finito, observamos que si P es la matriz de transición y $\boldsymbol{\pi}$ es el vector que representa la distribución estacionaria, podemos escribir matricialmente las ecuaciones anteriores como

$$\boldsymbol{\pi' P = \pi,}$$

Donde $\boldsymbol{\pi}$ es un vector columna y $\boldsymbol{\pi'}$ es su transpuesto.

Cabe señalar que dada una cadena de Markov, no siempre es posible encontrar una distribución estacionaria.

Observación 2

La condición $\boldsymbol{\pi}'\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}$ tiene como consecuencia el hecho de que para cualquier número natural $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$, se cumpla que $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{n}}$, es decir, $\boldsymbol{\pi}$ es también una distribución estacionaria para la matriz $\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{n}}$.

Esto significa que si la variable aleatoria inicial $\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}}$ tiene esa distribución $\boldsymbol{\pi}$, entonces la distribución de $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}$ también es $\boldsymbol{\pi}$ pues $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{j}) = \sum_{i} \boldsymbol{\pi}_{i}\boldsymbol{p}_{ij}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\pi}_{ij}$, es decir, esta distribución no cambia con el paso del tiempo y por ello se le llama estacionaria o invariante.

Ejemplo (Existencia múltiple)

Considere una cadena de Markov sobre el conjunto de estados $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ y con probabilidades de transición dada por la siguiente matriz:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1/3} & \mathbf{1/3} & \mathbf{1/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Es inmediato comprobar que el vector $\boldsymbol{\pi} = (\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha})$ satisface el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{\pi}'\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}$ para cada $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. Existen entonces una infinidad de distribuciones estacionarias para esta cadena.

Tal vez agregar un tutorial del producto de matrices.

Ejemplo (No existencia)

No existe ninguna distribución para la caminata aleatoria simétrica simple sobre Z, pues la condición $\boldsymbol{\pi}'\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}$ se reduce en el sistema de ecuaciones en diferencias $\boldsymbol{\pi_j} = \frac{\pi_{j-1}}{2} + \frac{\pi_{j+1}}{2}$. O bien $\boldsymbol{\pi_{j+1}} - \boldsymbol{\pi_j} = \boldsymbol{\pi_j} - \boldsymbol{\pi_{j-1}}$. Sumando esta ecuación se puede encontrar que para todo $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$, $\boldsymbol{\pi_{n+1}} - \boldsymbol{\pi_0} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\pi_1} - \boldsymbol{\pi_0})$. El lado izquierdo es acotado mientras el lado derecho crece sin límite cuando n es grande, a menos que $(\boldsymbol{\pi_1} - \boldsymbol{\pi_0}) = \mathbf{0}$. Esto demuestra que todas estas diferencias son cero, y por lo tanto $\boldsymbol{\pi_j}$ es constante para cualquier valor de j. Es decir, el vector constante es la solución al sistema de ecuaciones en diferencias planteado, pero ello es incompatible con la restricción de $\sum_j \boldsymbol{\pi_j} = \mathbf{1}$. Por lo tanto no existe ninguna distribución de probabilidad $\boldsymbol{\pi}$ que cumpla la igualdad $\boldsymbol{\pi}'\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}$ para esta cadena.

Ejemplo (Existencia única)

Consideremos una cadena de Markov con espacio de estados $\boldsymbol{E} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ y una matriz de transición

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/3} & \mathbf{1/3} & \mathbf{1/3} \\ \mathbf{1/4} & \mathbf{1/2} & \mathbf{1/4} \\ \mathbf{1/6} & \mathbf{1/3} & \mathbf{1/2} \end{pmatrix}$$

Veamos que esta cadena tiene una única distribución estacionaria $\boldsymbol{\pi}$. La relación que debe satisfacer esta distribución es $\boldsymbol{\pi}'\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}$, es decir,

$$(\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2)\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$$

Y obtenemos las tres ecuaciones siguientes,

$$\frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{6} = \pi_0,$$

$$\frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_2}{3} = \pi_1,$$

$$\frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{2} = \pi_2,$$

Junto con la condición adicional de que el vector $\boldsymbol{\pi}$ represente una distribución de probabilidad, es decir,

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$\pi_0 = \frac{6}{25}, \pi_1 = \frac{2}{5}, \pi_2 = \frac{9}{25}$$

Que son positivos y satisfacen las cuatro ecuaciones, de modo que representan la única distribución estacionaria de la cadena.

Ejemplo 2 (Cadena con dos estados)

Consideremos una cadena de Markov con dos estados posibles y matriz de transición

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} & \mathbf{1}-\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$$

Donde $\mathbf{0} < \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} < \mathbf{1}$, $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}$. La ecuación para hallar la distribución estacionara son

$$(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{2}} = \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{1}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{1}} + (\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{2}} = \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{2}}$$

Que son la misma ecuación. Tenemos además la condición para que $\boldsymbol{\pi}$ sea una distribución de probabilidad:

$$\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$$

La solución es

$$\boldsymbol{\pi}_{1} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\pi}_{2} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}$$

Distribuciones Estacionarias

Condiciones de existencia de distribuciones estacionarias

Dadas estas consideraciones, es natural plantearse el problema de encontrar condiciones necesarias y suficientes para que una cadena tenga alguna distribución estacionaria.

Primeramente, cuando existe una distribución estacionaria, ésta tiene como soporte el conjunto de estados recurrentes positivos.